2016학년도 신입학 수시모집 논술고사
문제, 출제의도, 채점기준 및 모범답안
(자연계열 – 오전)

광운대학교 입학처

2016학년도 신입학 수시모집

논술고사 문제지 (자연계열-오전)

※ 본 논술문제에 대한 지적 소유권은 광운대학교에 있으며,
시험 종료 후 답안지와 함께 제출하여야 합니다.

지원학과(부)			
수 험 번 호		성 명	

※ 답안 작성 시 유의 사항

■ 시험시간은 2시간(120분)입니다.

■ 답안지 상의 모집단위, 성명, 수험번호, 주민등록번호 앞자리를 "**검정색 볼펜**"으로 정확히 기재하고 진하게 마킹하기 바랍니다.

■ 답안 작성란은 "**검정색 볼펜**" 또는 "**검정색 연필(샤프)**"로 작성하십시오.
※ 검정색 이외(빨간색, 파란색 등) 사용 금지
※ **지우개, 수정액, 수정테이프 사용 가능**

■ 답안지에는 제목을 쓰지 마십시오.

■ 답안과 관련 없는 표현이나 표시를 하지 마십시오.

■ 답안지 1장 이내에 답안을 작성해야 합니다.

광운대학교
KwangWoon University

[문제 1] 다음 제시문을 읽고 문항별로 풀이와 함께 답하시오. (50점)

1. 모든 자연수의 집합을 $\mathbb{N}$, 모든 정수의 집합을 $\mathbb{Z}$, 모든 실수의 집합을 $\mathbb{R}$로 나타낸다. 또한 집합 X와 Y는 $\mathbb{R}$의 부분집합이다.

2. 집합 X에 대하여 집합 $M(X), C(X), T(X)$를 다음과 같이 정의한다. (단, E는 이차 단위행렬이다.)

$$M(X)=\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \middle|\ a,b,c,d \in X\right\}$$
$$C(X)=\{A \in M(X) \mid A^2 = E\}$$
$$T(X)=\{A \in M(X) \mid A\text{의 역행렬이 존재한다}\}$$

3. 함수 $f : X \to Y$에 대하여 (성질 1)과 (성질 2)를 다음과 같이 정의한다.

(성질 1) 모든 $x_1, x_2 \in X$에 대하여 $f(x_1+x_2) = f(x_1)+f(x_2)$이다.
(성질 2) 모든 $x_1, x_2 \in X$에 대하여 $f(x_1x_2) = f(x_1)f(x_2)$이다.

[1] $ad=bc+1$을 만족시키는 행렬 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in C(\mathbb{Z})$를 모두 구하시오. [11점]

[2] 제시문 3에서 주어진 (성질 1)을 만족시키는 함수 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$가 다음 성질을 만족한다.

$$x > 0 \Leftrightarrow f(x) > 0$$

이때 집합 $W=\{x \in \mathbb{Z} \mid f(x^2) < f(4x-3)\}$에 속하는 원소의 개수를 구하시오. [7점]

[3] 함수 $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$가 제시문 3에서 주어진 (성질 1)과 (성질 2)를 모두 만족시키는 일대일 함수일 때 $g(\sqrt{3})$의 값을 구하시오. [10점]

[4] 함수 $g : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$는 제시문 3에서 주어진 (성질 1)을 만족시키고 어떤 $t \in \mathbb{Z}$에 대하여 $g(t) \neq 0$이다. 또한 함수 $h : M(\mathbb{Z}) \to M(\mathbb{Z})$를 다음과 같이 정의하자.

$$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M(\mathbb{Z})\text{에 대하여 } h(A)=\begin{pmatrix} a & g(b) \\ c & g(d) \end{pmatrix}$$

(1) 모든 $m \in \mathbb{Z}$에 대하여 $g(m)=mg(1)$이 성립함을 증명하시오. [9점]

(2) 모든 $n \in \mathbb{N}$에 대하여 다음 등식이 성립함을 수학적 귀납법을 이용하여 증명하시오. (단, $h^1=h$이고 $h^{n+1}=h \circ h^n$ 이다.) [7점]

$$h^n(A)=\begin{pmatrix} a & b\{g(1)\}^n \\ c & d\{g(1)\}^n \end{pmatrix}$$

(3) $n \in \mathbb{N}$일 때 $h^n(A) \in T(\mathbb{Z})$이기 위한 필요충분조건은 $A \in T(\mathbb{Z})$임을 증명하시오. [6점]

<다음 장에 계속>

[문제 2] 다음 제시문을 이용하여 문항 별로 풀이와 함께 답하시오. (50점)

[매개변수로 나타내어진 함수] 두 변수 x, y 사이의 함수 관계가 변수 t를 매개로 하여

$$x=f(t),\ \ y=g(t)$$

의 꼴로 나타내어 질 때 변수 t를 x, y의 매개변수라 하고, 이 관계를 매개변수로 나타내어진 함수라고 한다.

[매개변수로 나타내어진 함수의 도함수] 매개변수 t로 나타내어진 두 함수 $x=f(t)$, $y=g(t)$가 t에 대하여 미분가능하고 $\dfrac{dx}{dt}=f'(t)\neq 0$이면

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{\frac{dg}{dt}}{\frac{df}{dt}}=\frac{g'(t)}{f'(t)}$$

[매개변수로 나타내어진 곡선의 길이] 두 함수 $f(t), g(t)$의 도함수 $f'(t), g'(t)$가 모두 구간 (α, β)에서 연속일 때, 매개변수 t로 나타내어진 곡선 $x=f(t), y=g(t)$ $(\alpha\leq t\leq\beta)$의 길이 l은

$$l=\int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{\{f'(t)\}^2+\{g'(t)\}^2}\ dt$$

[벡터의 내적] 두 벡터 $\vec{a}, \vec{b}$가 이루는 각의 크기가 θ일 때,

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta\quad(0\leq\theta\leq\pi)$$

[합성함수의 미분법] 두 함수 $y=f(u)$, $u=g(x)$가 미분가능할 때, 합성함수 $y=f(g(x))$의 도함수는

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\frac{du}{dx}=f'(g(x))g'(x)$$

[음함수의 미분법] 음함수 $f(x,y)=0$의 각 항을 합성함수의 미분법을 이용하여 x에 관하여 미분한 후, $\dfrac{dy}{dx}$를 구한다.

<다음 장에 계속>

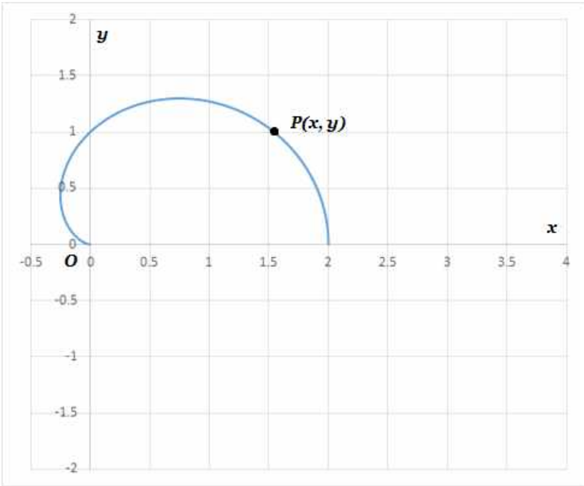
※ ([1]~[5]) 평면 위에서 움직이는 점 $P(x,y)$의 좌표가 매개변수 t의 함수로 다음과 같이 주어졌다.

$$x=\cos t+\cos^2 t,\ \ y=\sin t+\frac{1}{2}\sin 2t,\ \ 0\le t\le \pi$$

이때 점 P가 만드는 곡선을 그리면 <그림 1>과 같다. 또한 같은 평면 위에서 움직이는 다른 점 $Q(x,y)$는 매개변수 t의 함수로 다음과 같이 주어졌다.

$$x=3\cos^2 t,\ y=3\sin t\cos t\ ,\ \ 0\le t\le \pi$$

점 P와 Q가 만드는 평면 위의 두 곡선에 대한 다음 물음에 답하시오.



<그림 1> 점 P가 만드는 곡선

[1] 점 Q를 나타내는 $x=3\cos^2 t,\ \ y=3\sin t\cos t$에서 변수 t를 소거하여 점 Q가 그리는 곡선을 두 변수 x와 y만의 관계식으로 나타내고, 그 관계식이 어떤 도형을 나타내는지 서술하시오. [6점]

[2] $0<t<\pi$이고 $t\neq\frac{\pi}{2}$인 t에 대응하는 점 P와 Q에 대하여 두 벡터 $\overrightarrow{OP}$와 $\overrightarrow{OQ}$가 이루는 각 θ의 크기를 구하시오. (단, 점 O는 평면의 원점이다.) [12점]

[3] 두 곡선이 $t=t_0$일 때 점 C에서 만난다고 하자.

(1) 점 C의 좌표를 구하시오. [6점]

(2) 원점과 점 C를 지나는 직선이 x축의 양의 방향과 이루는 각 β를 구하시오.(단, $0\le\beta\le\frac{\pi}{2}$) [4점]

[4] 문항 [3]의 $t=t_0$과 점 C에 관련한 다음 물음에 답하시오.

(1) $t=t_0$에서 점 P가 만드는 곡선에 대하여 $\frac{dy}{dx}$를 구하시오. [4점]

(2) 점 Q가 만드는 곡선에 대하여 점 C에서의 접선의 방정식을 구하시오. [7점]

[5] $0\le t\le s$의 구간에서 점 P가 만드는 곡선의 길이를 $D(s)$, 점 Q가 만드는 곡선의 길이를 $L(s)$라고 할 때, 다음 극한값을 구하시오.(단, $s\le\pi$) [11점]

$$\lim_{s\to+0}\frac{D(s)}{L(s)}$$

<끝>

2016학년도 광운대학교 논술고사 (자연계열 - 오전)

출제의도, 채점기준 및 모범답안

[문제 1]

◈ 출제의도

행렬에 대한 케일리•해밀턴의 공식을 이해하고 적용할 수 있는 능력, 역행렬이 존재하기 위한 조건을 실제 행렬에 적용시킬 수 있는 응용력 및 계산능력을 평가한다.
또한 함수, 합성함수, 일차함수에 대한 이해력과 이차부등식의 해를 구하는 계산력을 평가하고 수학적 귀납법에 대한 이해력과 논리적인 증명능력을 평가한다.

[1] 행렬에 대한 케일리 정리를 이해하고 적용할 수 있는 능력 및 계산능력을 평가한다.
[2] 주어진 성질을 만족하는 함수에 대한 이해력과 이차부등식의 해를 구하는 계산력을 평가한다.
[3] 주어진 성질을 만족하는 함수와 일대일 함수에 대한 이해력을 평가하고 거듭제곱근에 대한 이해력 및 계산력을 평가한다.
[4] (1) 정수의 집합에서 정의되고 주어진 성질을 만족하는 함수를 구체적으로 구하는 계산능력을 평가한다.
(2) 주어진 성질을 만족하는 함수와 합성함수에 대한 이해력 및 계산능력을 평가한다. 또한 수학적 귀납법에 대한 이해력과 논리적인 증명능력을 평가한다.
(3) 역행렬이 존재하기 위한 조건을 실제 행렬에 적용시킬 수 있는 응용력 및 계산력을 평가한다.

◈ 문항별 배점

[1] 11점
[2] 7점
[3] 10점
[4] (1)9점 (2) 7점 (3) 6점

◈ 출제근거

[1] 행렬의 상등관계, 수학 I, 두산동아, 14쪽
행렬의 곱셈, 수학 I, 두산동아, 25쪽
케일리 정리, 수학 I 익힘책, 금성출판사, 27쪽

[2] 함수, 수학, 대한교과서, 251쪽
이차부등식, 수학, 대한교과서, 145쪽

[3] 일대일 함수, 수학, 대한교과서, 256쪽
거듭제곱근, 수학 I, 두산동아, 64쪽

[4] (1) 함수, 수학, 대한교과서, 251쪽
(2) 함수, 수학, 대한교과서, 251쪽
합성함수, 수학, 대한교과서, 259쪽
수학적 귀납법, 수학 Ⅰ, 두산동아, 164쪽
(3) 역행렬, 수학 Ⅰ, 두산동아, 37쪽
합성함수, 수학, 대한교과서, 259쪽

<풀이 예시>

[1] $A^2-(a+d)A+(ad-bc)E=O$이다. $A\in C(\mathbb{Z})$이므로 $A^2=E$이고 $ad-bc=1$이므로 $(a+d)A=(ad-bc+1)E=2E$이다. 그런데 $(a+d)A=\begin{pmatrix}(a+d)a & (a+d)b \\ (a+d)c & (a+d)d\end{pmatrix}$이고 $2E=\begin{pmatrix}2 & 0 \\ 0 & 2\end{pmatrix}$이므로 $(a+d)b=0$이고 $(a+d)c=0$이다.
만일 $b\neq 0$이라면 $a+d=0$이므로 $O=(a+d)A=2E$이다. 이는 모순이므로 $b=0$이다.
만일 $c\neq 0$이라면 $a+d=0$이므로 $O=(a+d)A=2E$이다. 이는 모순이므로 $c=0$이다.
따라서 $A=\begin{pmatrix}a & 0 \\ 0 & d\end{pmatrix}$이고 $A^2=\begin{pmatrix}a^2 & 0 \\ 0 & d^2\end{pmatrix}=E$이므로 $a^2=1, d^2=1$이다. 그러므로 $a=\pm 1$, $d=\pm 1$이다.
그런데 $ad=bc+1$이므로 $A=\begin{pmatrix}1 & 0 \\ 0 & 1\end{pmatrix}$ 또는 $A=\begin{pmatrix}-1 & 0 \\ 0 & -1\end{pmatrix}$이다.

[2] $f(0)=f(0)+f(0)$이므로 $f(0)=0$이다.
또한 $f(0)=f(x^2+(-x^2))=f(x^2)+f(-x^2)$이므로 $f(-x^2)=-f(x^2)$이다.
그러므로 $f(x^2)<f(4x-3)\Leftrightarrow f(-x^2+4x-3)>0\Leftrightarrow -x^2+4x-3>0\Leftrightarrow 1<x<3$이다.
따라서 $W=\{x\in\mathbb{Z}\mid f(x^2)<f(4x-3)\}=\{x\in\mathbb{Z}\mid 1<x<3\}=\{2\}$이므로 원소의 개수는 1이다.

[3] $g(0)=g(0)+g(0)$이므로 $g(0)=0$이다. 또한, $g(1)=g(1)g(1)$이므로 $g(1)=0$ 또는 $g(1)=1$이다.
그런데 g는 일대일 함수이므로 $g(1)=1$이고 $g(3)=g(1)+g(1)+g(1)=3$이다.
또한 $3=g(3)=g(\sqrt{3}\ \sqrt{3})=\{g(\sqrt{3})\}^2$이므로 $g(\sqrt{3})=\pm\sqrt{3}$이다.
그런데 $g(\sqrt{3})=g(\sqrt[4]{3}\ \sqrt[4]{3})=\{g(\sqrt[4]{3})\}^2\geq 0$이므로 $g(\sqrt{3})=\sqrt{3}$이다.

[4] (1) (i) $m=0$이면 $g(0)=g(0)+g(0)$이므로 $g(0)=0$이다. 따라서 $g(0)=0=0g(1)$이다.
(ii) $m>0$이면 $g(m)=g(1+1+\cdots+1)=g(1)+g(1)+\cdots+g(1)=mg(1)$이다.
(iii) $m<0$이면 $g(m)=g((-m)(-1))=g(-1)+g(-1)+\cdots+g(-1)=(-m)g(-1)$이다.
그런데 $0=g(0)=g(1+(-1))=g(1)+g(-1)$이므로 $g(-1)=-g(1)$이고 $g(m)=(-m)g(-1)=-(-m)g(1)=mg(1)$이다.
그러므로 모든 $m\in\mathbb{Z}$에 대하여 $g(m)=mg(1)$이 성립한다.

(2) $n=1$일 때 $h^1(A)=h(A)=\begin{pmatrix}a & g(b) \\ c & g(d)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a & bg(1) \\ c & dg(1)\end{pmatrix}$이므로 성립한다.
$n=k$일 때 성립한다고 가정하자. 즉, $h^k(A)=\begin{pmatrix}a & b\{g(1)\}^k \\ c & d\{g(1)\}^k\end{pmatrix}$라 가정하자.

그러면 $h^{k+1}(A)=(h\circ h^k)(A)=h\begin{pmatrix} a & b\{g(1)\}^k \\ c & d\{g(1)\}^k \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & g(b\{g(1)\}^k) \\ c & g(d\{g(1)\}^k) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & b\{g(1)\}^k g(1) \\ c & d\{g(1)\}^k g(1) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & b\{g(1)\}^{k+1} \\ c & d\{g(1)\}^{k+1} \end{pmatrix}$이다.
즉 $n=k+1$인 경우에도 성립하므로 수학적 귀납법에 의하여 주어진 식이 증명된다.

(3) $g(1)=0$이면 모든 $m\in\mathbb{Z}$에 대하여 $g(m)=mg(1)=0$이므로 가정에 모순이다. 즉, $g(1)\neq 0$이다.
따라서 $ad\{g(1)\}^n-bc\{g(1)\}^n\neq 0$이기 위한 필요충분조건은 $ad-bc\neq 0$이다. 그런데 $h^n(A)$의 역행렬이 존재하기 위한 필요충분조건이 $ad\{g(1)\}^n-bc\{g(1)\}^n\neq 0$이고 A의 역행렬이 존재하기 위한 필요충분조건이 $ad-bc\neq 0$이므로 $h^n(A)\in T(\mathbb{Z})$이기 위한 필요충분조건은 $A\in T(\mathbb{Z})$이다.

<채점기준>

[1] 케일리 • 해밀턴의 공식을 이용하여 $(a+d)b=0$이고 $(a+d)c=0$인 관계를 구했으면
[5점]

$b=0$, $c=0$를 구하고 행렬 $A=\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}$를 구했으면 [2점]

$a=\pm 1$, $d=\pm 1$를 구하고 $ad=bc+1$를 이용하여 $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ 또는 $A=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$를 구했으면 [4점]

[2] $f(0)=0$와 $f(-x^2)=-f(x^2)$를 이용하여
$f(x^2)<f(4x-3)\Leftrightarrow f(-x^2+4x-3)>0\Leftrightarrow -x^2+4x-3>0\Leftrightarrow 1<x<3$를 구했으면 [5점]
$W=\{2\}$와 원소의 개수가 1임을 구했으면 [2점]

[3] $g(0)=0$를 구하고 g가 일대일 함수임을 이용하여 $g(1)=1$이고 $g(3)=3$를 구했으면 [5점]
$g(\sqrt{3})=\pm\sqrt{3}$를 구하고 $g(\sqrt{3})\geq 0$임을 이용하여 $g(\sqrt{3})=\sqrt{3}$을 구했으면 [5점]

[4] (1) (i) $m=0$인 경우에 $g(0)=0g(1)$임을 보였으면 [2점]
(ii) $m>0$인 경우에 $g(m)mg(1)$임을 보였으면 [2점]
(iii) $m<0$인 경우에 $g(-1)=-g(1)$과 $g(m)=(-m)g(-1)$를 이용하여 $g(m)=mg(1)$임을 보였으면
[5점]

(2) $n=1$인 경우에 $h^1(A)=\begin{pmatrix} a & bg(1) \\ c & dg(1) \end{pmatrix}$임을 언급하고 $n=k$인 경우에 $h^k(A)=\begin{pmatrix} a & b\{g(1)\}^k \\ c & d\{g(1)\}^k \end{pmatrix}$이 성립한다고 가정했으면 [2점]
$h^{k+1}(A)=\begin{pmatrix} a & g(b\{g(1)\}^k) \\ c & g(d\{g(1)\}^k) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & b\{g(1)\}^k g(1) \\ c & d\{g(1)\}^k g(1) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & b\{g(1)\}^{k+1} \\ c & d\{g(1)\}^{k+1} \end{pmatrix}$임을 보였으면 [5점]

(3) $g(1)\neq 0$임을 보였으면 [3점]
$ad\{g(1)\}^n-bc\{g(1)\}^n\neq 0$이기 위한 필요충분조건은 $ad-bc\neq 0$임을 언급하고 $h^n(A)$의 역행렬이 존재하기 위한 필요충분조건이 $ad\{g(1)\}^n-bc\{g(1)\}^n\neq 0$이며 A의 역행렬이 존재하기 위한 필요충분조건은 $ad-bc\neq 0$임을 언급했으면 [3점]

[문제 2]

▣ 출제의도

교육과정에 중요하게 다루는 여러 가지 개념에 대한 이해와 문제해결 능력을 매개변수로 주어진 함수를 이용하여 나타내어지는 평면 곡선에 대한 문제 해결을 통해 확인하고자 함. 매개변수로 주어진 함수들의 관계식을 구하고 그가 나타내는 도형, 곡선 위의 점에 대한 위치벡터와 벡터의 내적, 삼각방정식을 만들고 그의 해 구하기, 곡선 위의 점에서의 도함수와 접선의 방정식, 그리고 곡선의 길이를 구하고 관련된 함수의 극한에 관한 문제들을 통해 관련된 수학 개념에 대한 이해와 활용능력, 그리고 문제를 해결하는 과정에서 필요한 다양한 수학적 지식을 활용과 수리적인 계산 능력 등을 평가하고자 함.

[1] 점의 좌표가 매개변수로 주어진 곡선에서 매개변수를 소거하는 문제를 통해 삼각함수에 관한 기본적인 지식과 그의 활용 능력, 계산능력의 정확성, 나아가 이차곡선에 대한 이해를 평가
[2] 곡선 위의 점을 위치벡터로 생각하게 하여 벡터의 내적에 관한 문제를 통해 내적에 대한 정확한 이해도와 그의 활용 능력, 계산의 정확성 등을 평가
[3] 매개변수를 이용하여 주어진 두 곡선이 교차하는 점을 삼각방정식을 만들어 그 해를 구하는 문제로 바꾸어 해결하는 능력과 직선의 기울기와 삼각함수의 관계를 이해하고 있는지를 평가
[4] 매개변수를 이용하여 정의되는 함수의 도함수에 대한 이해, 음함수에 대한 이해와 음함수의 미분법, 음함수로 주어진 함수에 대한 접선의 방정식을 정확하게 구할 수 있는 지 등을 평가
[5] 매개변수를 이용하여 주어진 곡선의 길이를 이해하고 그를 구할 수 있는지를 평가하고 그와 연계하여 정적분으로 정의되는 함수를 이해하고 관련된 함수의 극한에 대한 이해와 극한값을 구하는 능력을 평가

▣ 제시문과 문제의 출제 근거 및 문제 해결에 필요한 내용의 근거

● 제시문

[매개변수로 나타내어진 함수] 수학II, 더텍스트, 2014, 132쪽
수학II, 금성출판사, 2014, 142쪽,
수학II, 좋은책신사고, 2011, 136쪽
[매개변수로 나타내어진 함수의 도함수] 수학II, 금성출판사, 2014, 143쪽
[매개변수로 나타내어진 곡선의 길이] 적분과 통계, 천재교육, 2015, 68쪽
[평면벡터의 내적] 기하와 벡터, 금성출판사, 2014, 140쪽
[합성함수의 미분법] 수학II, 금성출판사, 2014, 145쪽
[음함수의 미분법] 수학II, 금성출판사, 2014, 140쪽

● 문제

[1] 수학II, 금성출판사, 2014, 142쪽
[2] 기하와 벡터, 두산동아, 2014, 159쪽, 161쪽
[3] (a) 수학II, 더텍스트, 2014, 61쪽

(b) 수학, 대한교과서, 2009, 305쪽
[4] (a) 수학II, 금성출판사, 2014, 143쪽
(b) 수학II, 더텍스트, 2014, 156쪽
수학II, 금성출판사, 2014, 170쪽
[5] 적분과 통계, 천재교육, 2015, 68쪽
수학II, 더텍스트, 2014, 83쪽

▣ 문항별 배점

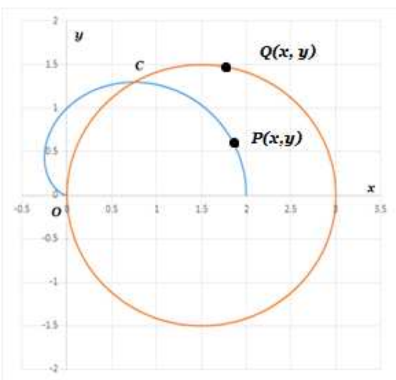
[1] 6점
[2] 12점
[3] (a) 6점, (b) 4점
[4] (a) 4점, (b) 7점
[5] 11점

▣ 채점 가이드

[1] 주어진 x, y를 제곱하면 다음을 얻는다.

$$x^2 = 9\cos^4 t,\ y^2 = 9\sin^2 t \cos^2 t$$

(또는 $y^2 = 9\sin^2 t \cos^2 t = 3\sin^2 t\, 3\cos^2 t$) **[2점]**



<그림 1> 점 P, Q가 만드는 곡선

이때 $\cos^2 t + \sin^2 t = 1$이고 $x = 3\cos^2 t$ 이므로 다음이 성립한다.

$$x^2 + y^2 = 9\cos^2 t(\cos^2 t + \sin^2 t) = 3x$$

(또는 $y^2 = 3(1-\cos^2 t)x = 3x - x^2$)

이를 정리하면 다음과 같다.

$$\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{3}{2}\right)^2 \text{ 또는 } x^2 + y^2 = 3x$$ **[2점]**

따라서 구하는 관계식은 중심이 $\left(\frac{3}{2}, 0\right)$이고 반지름이 $\frac{3}{2}$인 원을 나타낸다. **[2점]**

[2] 먼저 두 벡터를 구하면 다음과 같다.

$$\overrightarrow{OP} = \left(\cos t + \cos^2 t,\ \sin t + \frac{1}{2}\sin 2t\right) = \left(\cos t + \cos^2 t,\ \sin t + \sin t \cos t\right)$$

$$\overrightarrow{OQ} = \left(3\cos^2 t,\ 3\cos t \sin t\right)$$

두 벡터가 이루는 각을 θ라고 하자. 벡터의 내적에 의해 다음이 성립한다.

$$\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ} = |\overrightarrow{OP}|\,|\overrightarrow{OQ}|\cos\theta$$

그런데 삼각함수의 성질을 이용하여 정리하면

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ} &= 3\cos^3 t + 3\cos^4 t + 3\cos t \sin^2 t + 3\cos^2 t \sin^2 t \\ &= 3\cos t(\cos^2 t + \sin^2 t) + 3\cos^2 t(\cos^2 t + \sin^2 t) \\ &= 3\cos t + 3\cos^2 t \\ &= 3\cos t\,(1 + \cos t)\end{aligned}$$

[2점]

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{OP}| &= \sqrt{\cos^2 t + 2\cos^3 t + \cos^4 t + \sin^2 t + 2\sin^2 t \cos t + \sin^2 t \cos^2 t} \\ &= \sqrt{1 + 2\cos^3 t + 2\sin^2 t \cos t + \cos^4 t + \sin^2 t \cos^2 t} \\ &= \sqrt{1 + 2\cos t\left(\cos^2 t + \sin^2 t\right) + \cos^2 t(\cos^2 t + \sin^2 t)} \\ &= 1 + \cos t\end{aligned}$$

[2점]

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{OQ}| &= \sqrt{9\cos^4 t + 9\cos^2 t \sin^2 t} \\ &= \sqrt{9\cos^2 t(\cos^2 t + \sin^2 t)} \\ &= 3|\cos t|\end{aligned}$$

[2점]

이므로 $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ} = |\overrightarrow{OP}|\,|\overrightarrow{OQ}|\cos\theta$에서 다음을 얻는다.

$$3\cos t(1 + \cos t) = 3|\cos t|(1 + \cos t)\cos\theta$$

[2점]

따라서 주어진 t에 대해 다음을 얻는다.

$$\cos\theta = \frac{\cos t}{|\cos t|},\quad 0 < t < \pi,\ t \neq \frac{\pi}{2}$$

그런데 $|\cos t| = \begin{cases} \cos t, & 0 < t < \dfrac{\pi}{2} \\ -\cos t, & \dfrac{\pi}{2} < t < \pi \end{cases}$ 이므로 다음이 성립한다.

$$\cos\theta = \begin{cases} 1, & 0 < t < \dfrac{\pi}{2} \\ -1, & \dfrac{\pi}{2} < t < \pi \end{cases}$$ **[2점]**

이로부터 다음을 얻는다.

$$\theta = \begin{cases} 0, & 0 < t < \dfrac{\pi}{2} \\ \pi, & \dfrac{\pi}{2} < t < \pi \end{cases}$$ **[2점]**

[3] (a) 두 곡선이 t일 때 만나면 두 점의 대응하는 성분이 각각 같아야 하므로 다음이 성립한다.

$$\cos t + \cos^2 t = 3\cos^2 t,\quad \sin t + \cos t \sin t = 3\cos t \sin t,\quad 0 \le t \le \pi$$

이를 정리하면 다음 연립 방정식을 얻는다.

$$\cos t(1-2\cos t) = 0,\ \sin t(1-2\cos t) = 0,\ 0 \le t \le \pi$$ **[2점]**

따라서 $\cos t = \frac{1}{2}, t = \frac{\pi}{3}$이다. 따라서 점 C의 좌표는 다음과 같다. **[2점]**

$$C\left(\frac{3}{4}, \frac{3\sqrt{3}}{4}\right)$$ **[2점]**

(b) 원점과 점 C를 잇는 직선의 기울기 α는 다음과 같다.

$$\alpha = \frac{\frac{3\sqrt{3}}{4}}{\frac{3}{4}} = \sqrt{3}$$ **[2점]**

한편, $\tan\beta = \sqrt{3}$이므로 $\beta = \frac{\pi}{3}$이다. **[2점]**

[4] (a) 문항 [3]에서 $t_0 = \frac{\pi}{3}$이므로 점 $P(x,y)$에 대해 다음을 얻는다.

$$\frac{dy}{dt} = \cos t + \cos 2t = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0,$$

$$\frac{dx}{dt} = -\sin t - 2\sin t\cos t = -\frac{\sqrt{3}}{2} - 2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{2} = -\sqrt{3}$$ **[2점]**

(※ **여기서 분모만 계산한 경우에도 [2점]**)

이로부터 점 P가 만드는 곡선 위의 점 C에 대응하는 t에서 다음을 얻는다.

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=0$$ **[2점]**

(b) 문항 [1]에서 점 Q가 만드는 곡선은 다음과 같은 원임을 보였다.

$$\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+y^2=\left(\frac{3}{2}\right)^2 \quad \text{또는} \quad x^2+y^2=3x$$

이로부터 음함수 미분법을 사용하면 다음을 얻는다.

$$2x+2y\frac{dy}{dx}=3 \quad \text{또는} \quad \frac{dy}{dx}=\frac{3-2x}{2y}$$ **[2점]**

따라서 점 $C\left(\frac{3}{4}, \frac{3\sqrt{3}}{4}\right)$에서 접선의 방정식의 기울기는 다음과 같다.

$$\frac{dy}{dx}=\frac{3-2\cdot\frac{3}{4}}{2\cdot\frac{3\sqrt{3}}{4}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$$ **[2점]**

따라서 구하는 접선의 방정식은 다음과 같다.

$$y-\frac{3\sqrt{3}}{4}=\frac{\sqrt{3}}{3}\left(x-\frac{3}{4}\right) \quad \text{또는} \quad y=\frac{\sqrt{3}}{3}x+\frac{\sqrt{3}}{2}$$ **[3점]**

[※ 별해] 접선의 기울기를 다음과 같이 구할 수도 있다. (총 4점)

점 $Q(3\cos^2 t, 3\cos t\sin t)$에 대하여 $2\sin t\cos t=\sin 2t$이므로 다음이 성립한다.

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{3\cos 2t}{-6\cos t\sin t}$$ (2점)

따라서 $t=\frac{\pi}{3}$이면 다음을 얻는다.

$$\frac{dy}{dx}=\frac{3\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)}{(-6)\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$$ (2점)

[5] 점 P에 대해

$$\begin{cases} x'(t) = -\sin t - 2\cos t\sin t = -\sin t - \sin 2t \\ y'(t) = \cos t + \cos 2t \end{cases}$$

이므로 다음을 얻는다.

$$\begin{aligned}(x'(t))^2 + (y'(t))^2 &= \sin^2 t + 2\sin t\sin 2t + \sin^2 2t + \cos^2 t + 2\cos t\cos 2t + \cos^2 2t \\ &= 2 + 2\{\cos 2t\cos t + \sin 2t\sin t\} = 2(1+\cos t) \\ &= 4\cos^2\frac{t}{2}\end{aligned}$$ **[2점]**

따라서 구간 $0 \le t \le s$에 대응하는 구하는 곡선의 길이 $D(s)$는 다음과 같다.

$$D(s) = \int_0^s \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\,dt = \int_0^s 2\cos\frac{t}{2}\,dt = \left[4\sin\frac{t}{2}\right]_0^s = 4\sin\frac{s}{2}$$ **[2점]**

한편, 점 Q에 대해

$$\begin{cases} x'(t) = -6\cos t\sin t = -3\sin 2t \\ y'(t) = 3\cos 2t \end{cases}$$

이므로 구간 $0 \le t \le s$에 대응하는 곡선의 길이 $L(s)$는 다음과 같다.

$$L(s) = \int_0^s \sqrt{\{x'(t)\}^2 + \{y'(t)\}^2}\,dt = \int_0^s 3\sqrt{\sin^2 2t + \cos^2 2t}\,dt = [3t]_0^s = 3s$$ **[3점]**

따라서 $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$임을 이용하면 다음을 얻는다.

$$\lim_{s\to +0}\frac{D(s)}{L(s)} = \lim_{s\to +0}\frac{4\sin\frac{s}{2}}{3s} = \lim_{s\to +0}\frac{4\sin\frac{s}{2}}{6\frac{s}{2}} = \frac{2}{3}$$ **[4점]**

▣ 풀이 예시

[1] 주어진 x,y를 제곱하면 다음을 얻는다.

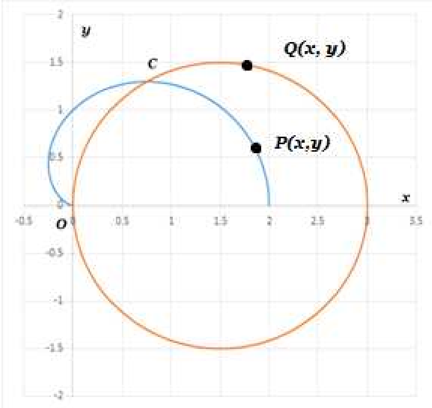
$$x^2 = 9\cos^4 t,\ \ y^2 = 9\sin^2 t\cos^2 t$$

(또는 $y^2 = 9\sin^2 t\cos^2 t = 3\sin^2 t\,3\cos^2 t$)

이때 $\cos^2 t + \sin^2 t = 1$이고 $x = 3\cos^2 t$ 이므로 다음이 성립한다.

$$x^2 + y^2 = 9\cos^2 t(\cos^2 t + \sin^2 t) = 3x$$

(또는 $y^2 = 3(1-\cos^2 t)x = 3x - x^2$)



<그림 1> 점 P,Q가 만드는 곡선

이를 정리하면 다음과 같다.

$$\left(x-\frac{3}{2}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{3}{2}\right)^2 \text{ 또는 } x^2+y^2=3x$$

따라서 구하는 관계식은 중심이 $\left(\frac{3}{2},0\right)$이고 반지름이 $\frac{3}{2}$인 원을 나타낸다.

[2] 먼저 두 벡터를 구하면 다음과 같다.

$$\overrightarrow{OP} = \left(\cos t + \cos^2 t,\ \sin t + \frac{1}{2}\sin 2t\right) = (\cos t + \cos^2 t,\ \sin t + \sin t\cos t)$$

$$\overrightarrow{OQ} = (3\cos^2 t,\ 3\cos t\sin t)$$

두 벡터가 이루는 각의 크기를 θ라고 하자. 벡터의 내적에 의해 다음이 성립한다.

$$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ} = |\overrightarrow{OP}|\,|\overrightarrow{OQ}|\cos\theta$$

그런데 삼각함수의 여러 가지 성질을 이용하면

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ} &= 3\cos^3 t + 3\cos^4 t + 3\cos t\sin^2 t + 3\cos^2 t\sin^2 t \\ &= 3\cos t(\cos^2 t + \sin^2 t) + 3\cos^2 t(\cos^2 t + \sin^2 t) \\ &= 3\cos t + 3\cos^2 t \\ &= 3\cos t\,(1+\cos t)\end{aligned}$$

$$|\overrightarrow{OP}| = \sqrt{\cos^2 t + 2\cos^3 t + \cos^4 t + \sin^2 t + 2\sin^2 t\cos t + \sin^2 t\cos^2 t}$$
$$= \sqrt{1 + 2\cos^3 t + 2\sin^2 t\cos t + \cos^4 t + \sin^2 t\cos^2 t}$$
$$= \sqrt{1 + 2\cos t\left(\cos^2 t + \sin^2 t\right) + \cos^2 t(\cos^2 t + \sin^2 t)}$$
$$= 1 + \cos t$$

$$|\overrightarrow{OQ}| = \sqrt{9\cos^4 t + 9\cos^2 t\sin^2 t}$$
$$= \sqrt{9\cos^2 t(\cos^2 t + \sin^2 t)}$$
$$= 3|\cos t|$$

이므로 $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ} = |\overrightarrow{OP}|\,|\overrightarrow{OQ}|\cos\theta$에서 다음을 얻는다.

$$3\cos t(1 + \cos t) = 3|\cos t|(1 + \cos t)\cos\theta$$

따라서 주어진 t에 대해 다음을 얻는다.

$$\cos\theta = \frac{\cos t}{|\cos t|}, \quad 0 < t < \pi,\ t \neq \frac{\pi}{2}$$

그런데 $|\cos t| = \begin{cases} \cos t, & 0 < t < \frac{\pi}{2} \\ -\cos t, & \frac{\pi}{2} < t < \pi \end{cases}$ 이므로 다음이 성립한다.

$$\cos\theta = \begin{cases} 1, & 0 < t < \frac{\pi}{2} \\ -1, & \frac{\pi}{2} < t < \pi \end{cases}$$

이로부터 다음을 얻는다.

$$\theta = \begin{cases} 0, & 0 < t < \frac{\pi}{2} \\ \pi, & \frac{\pi}{2} < t < \pi \end{cases}$$

[3] (a) 두 곡선이 t일 때 만나면 두 점의 대응하는 성분이 같아야 하므로 다음이 성립한다.

$$\cos t + \cos^2 t = 3\cos^2 t, \quad \sin t + \cos t\sin t = 3\cos t\sin t, \quad 0 \le t \le \pi$$

이를 정리하면 다음 연립 방정식을 얻는다.

$$\cos t(1-2\cos t)=0,\ \ \sin t(1-2\cos t)=0,\ \ 0 \le t \le \pi$$

따라서 $\cos t=\dfrac{1}{2}, t=\dfrac{\pi}{3}$이다. 따라서 점 C의 좌표는 다음과 같다.

$$C\left(\frac{3}{4}, \frac{3\sqrt{3}}{4}\right)$$

(b) 원점과 점 C를 잇는 직선의 기울기 α는 다음과 같다.

$$\alpha=\frac{\frac{3\sqrt{3}}{4}}{\frac{3}{4}}=\sqrt{3}$$

한편, $\tan\beta=\sqrt{3}$이므로 $\beta=\dfrac{\pi}{3}$이다.

[4] (a) 문항 [3]에서 $t_0=\dfrac{\pi}{3}$이므로 점 $P(x,y)$에 대해 다음을 얻는다.

$$\frac{dy}{dt}=\cos t+\cos 2t=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}=0,$$
$$\frac{dx}{dt}=-\sin t-2\sin t\cos t=-\frac{\sqrt{3}}{2}-2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{2}=-\sqrt{3}$$

이로부터 점 P가 만드는 곡선 위의 점 C에 대응하는 t에서 다음을 얻는다.

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=0$$

(b) 문항 [1]에서 점 Q가 만드는 곡선은 다음과 같은 원임을 보였다.

$$\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+y^2=\left(\frac{3}{2}\right)^2 \quad \text{또는 } x^2+y^2=3x$$

이로부터 음함수 미분법을 사용하면 다음을 얻는다.

$$2x+2y\frac{dy}{dx}=3 \ \ \text{또는 } \frac{dy}{dx}=\frac{3-2x}{2y}$$

따라서 점 $C\left(\dfrac{3}{4}, \dfrac{3\sqrt{3}}{4}\right)$에서 접선의 방정식의 기울기는 다음과 같다.

$$\frac{dy}{dx}=\frac{3-2\cdot\frac{3}{4}}{2\cdot\frac{3\sqrt{3}}{4}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

따라서 구하는 접선의 방정식은 다음과 같다.

$$y-\frac{3\sqrt{3}}{4}=\frac{\sqrt{3}}{3}\left(x-\frac{3}{4}\right) \quad \text{또는} \quad y=\frac{\sqrt{3}}{3}x+\frac{\sqrt{3}}{2}$$

[별해] 접선의 기울기를 다음과 같이 구할 수도 있다.

점 $Q\left(3\cos^2 t,\ 3\cos t\sin t\right)$에 대하여 $2\sin t\cos t=\sin 2t$이므로 다음이 성립한다.

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{3\cos 2t}{-6\cos t\sin t}$$

따라서 $t=\frac{\pi}{3}$이면 다음을 얻는다.

$$\frac{dy}{dx}=\frac{3\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)}{(-6)\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

[5] 점 P에 대해

$$\begin{cases} x'(t)=-\sin t-2\cos t\sin t=-\sin t-\sin 2t \\ y'(t)=\cos t+\cos 2t \end{cases}$$

이므로 다음을 얻는다.

$$\begin{aligned}(x'(t))^2+(y'(t))^2 &=\sin^2 t+2\sin t\sin 2t+\sin^2 2t+\cos^2 t+2\cos t\cos 2t+\cos^2 2t \\ &=2+2\{\cos 2t\cos t+\sin 2t\sin t\}=2(1+\cos t) \\ &=4\cos^2\frac{t}{2}\end{aligned}$$

따라서 구간 $0\le t\le s$에 대응하는 구하는 곡선의 길이 $D(s)$는 다음과 같다.

$$D(s)=\int_0^s\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2}\,dt=\int_0^s 2\cos\frac{t}{2}\,dt=\left[4\sin\frac{t}{2}\right]_0^s=4\sin\frac{s}{2}$$

한편, 점 Q에 대해

$$\begin{cases} x'(t) = -6\cos t \sin t = -3\sin 2t \\ y'(t) = 3\cos 2t \end{cases}$$

이므로 구간 $0 \le t \le s$에 대응하는 곡선의 길이 $L(s)$는 다음과 같다.

$$L(s) = \int_0^s \sqrt{\{x'(t)\}^2 + \{y'(t)\}^2}\, dt = \int_0^s 3\sqrt{\sin^2 2t + \cos^2 2t}\, dt = [3t]_0^s = 3s$$

따라서 $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$임을 이용하면 다음을 얻는다.

$$\lim_{s \to +0} \frac{D(s)}{L(s)} = \lim_{s \to +0} \frac{4\sin\frac{s}{2}}{3s} = \lim_{s \to +0} \frac{4\sin\frac{s}{2}}{6\frac{s}{2}} = \frac{2}{3}$$