2014학년도 수시 논술고사
출제문제, 출제의도, 모범답안
(자연계열)

`

광운대학교 입학처

2014학년도 신입학 수시 1차 모집

논술고사 문제지 (자연계열)

※ 본 논술문제에 대한 지적 소유권은 광운대학교에 있으며,
시험 종료 후 답안지와 함께 제출하여야 합니다.

지원학과(부)			
수 험 번 호		성 명	

※ 답안 작성 시 유의 사항

■ 시험시간은 2시간(120분)입니다.

■ 답안지 상의 모집단위, 성명, 수험번호, 주민등록번호 앞자리를 "**검정색 볼펜**"으로 정확히 기재하고 진하게 마킹하기 바랍니다.

■ 답안 작성란은 "**검정색 볼펜**" 또는 "**검정색 연필(샤프)**"로 작성하십시오.
※ 검정색 이외(빨간색, 파란색 등) 사용 금지
※ **지우개, 수정액, 수정테이프 사용 가능**

■ 답안지에는 제목을 쓰지 마십시오.

■ 답안과 관련 없는 표현이나 표시를 하지 마십시오.

■ 답안지 1장 이내에 답안을 작성해야 합니다.

광운대학교
KwangWoon University

[문제 1] 다음 제시문을 이용하여 문항별로 풀이와 함께 답하시오. (50점)

1. $\mathbb{N}$는 자연수 전체의 집합이고 $\mathbb{R}$는 실수 전체의 집합이다.

2. $M_2(\mathbb{R})$는 모든 성분이 실수인 2×2 행렬 전체의 집합이다.

3. 행렬 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\in M_2(\mathbb{R})$에 대하여 $\det(A)=ad-bc$로 정의하면, 두 행렬 $A, B\in M_2(\mathbb{R})$에 대하여 $\det(AB)=\det(A)\det(B)$이다.

4. 미지수 x, y에 대한 연립방정식

$$\begin{cases} ax+by = s \\ cx+dy = t \end{cases} \quad \text{(단, } a,b,c,d,s,t\text{는 실수이다.)}$$

은 다음과 같이 행렬의 곱을 이용하여 표현할 수 있다.

$$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},\ \ X=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},\ \ B=\begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix}\text{에 대하여 } AX=B$$

또한 연립방정식 $AX=B$의 해가 존재하면 해는 단 한 쌍 존재하거나 무한히 많이 존재한다.

5. 수열 $\{a_n\}, \{b_n\}, \{c_n\}, \{d_n\}$의 극한값이 모두 존재할 때 행렬 $A_n=\begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix}$의 극한을

$$\lim_{n\to\infty} A_n = \begin{pmatrix} \lim\limits_{n\to\infty} a_n & \lim\limits_{n\to\infty} b_n \\ \lim\limits_{n\to\infty} c_n & \lim\limits_{n\to\infty} d_n \end{pmatrix}$$으로 정의한다.

[1] $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$와 $g:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$는 임의의 $n\in\mathbb{N}$에 대하여 다음과 같이 정의된 함수이다.

$f(n)=n$의 모든 양의 약수의 개수, $\quad g(n)=n$의 모든 양의 약수의 합

함수 $h:\mathbb{N}\to M_2(\mathbb{R})$를 임의의 $n\in\mathbb{N}$에 대하여 $h(n)=\begin{pmatrix} f(21n) & g(2n+4) \\ -f(5n+4) & -g(4n-1) \end{pmatrix}$으로 정의하고 $A=h(2)$라 하자. 이때 행렬 $B=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$에 대하여 연립방정식 $A^3X=B$의 해를 구하시오.

[2] 양수 r에 대하여 점 $T(r,0)$를 원점을 중심으로 시계반대방향으로 각 α, β만큼 회전하여 얻는 점을 각각 $P(a,b)$와 $Q(c,d)$라 하자. 행렬 $K=\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$와 함수 $f:M_2(\mathbb{R})\to M_2(\mathbb{R})$, $f(A)=AK$ $(A\in M_2(\mathbb{R}))$에 대하여 다음 물음에 답하시오.

(1) 행렬 K를 r, α, β를 이용하여 나타내시오.

(2) 행렬 $B=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$에 대하여 연립방정식 $KX=B$가 단 한 쌍의 해를 갖게 하는 각 α, β의 관계를 구하시오.

(3) 행렬 $B=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$에 대하여 연립방정식 $AX=B$가 단 한 쌍의 해를 가질 때 연립방정식 $f(A)X=B$의 해의 존재에 대하여 설명하시오.

<다음 장 계속>

[3] 평면 위의 점 $P(a,c), Q(b,d)$를 원점을 중심으로 시계반대방향으로 각 θ만큼 회전하여 얻는 점을 각각 $P_1(a_1, a_3), Q_1(a_2, a_4)$라 하자. 두 행렬 $A, R_\theta \in M_2(\mathbb{R})$를 각각 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $R_\theta = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix}$로 정의할 때 다음 명제의 참 또는 거짓을 판정하고, 참이면 증명하고 거짓이면 반례를 제시하여 설명하시오.

"연립방정식 $AX = O$가 단 한 쌍의 해를 가지면, 임의의 각 θ에 대하여 연립방정식 $R_\theta X = O$가 단 한 쌍의 해를 갖는다." (단, O는 모든 성분이 0인 2×1 행렬이다.)

[4] 극한값을 갖는 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $\{c_n\}$, $\{d_n\}$로 이루어진 행렬 $A_n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix}$에 대해 $A = \lim_{n\to\infty} A_n$이라 하자. 이때 다음 명제의 참 또는 거짓을 판정하고, 참이면 증명하고 거짓이면 반례를 제시하여 설명하시오.

"$B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$일 때 모든 n에 대하여 연립방정식 $A_n X = B$의 해가 존재하면, 연립방정식 $AX = B$의 해가 존재한다."

<다음 장 계속>

[문제 2] 다음 제시문을 이용하여 문항별로 풀이와 함께 답하시오. (50점)

[곡선의 길이] 평면 위를 움직이는 점 $P(x, y)$ 의 위치가 매개변수 함수 $x = f(t),\, y = g(t)$ 로 주어질 때 시각 $t = a$ 에서 시각 $t = b$ 까지 점 P가 그리는 곡선의 길이 s 는 다음과 같다.

$$s = \int_a^b \sqrt{\{f'(t)\}^2 + \{g'(t)\}^2}\ dt$$

[합성함수의 미분법] 두 함수 $y = f(u),\, u = g(x)$ 가 미분가능할 때, 합성함수 $y = f(g(x))$ 의 도함수 $\frac{dy}{dx}$ 는 다음과 같다.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx} = f'(g(x))g'(x)$$

[음함수의 미분법] x 의 함수 y 가 $f(x,y) = 0$ 의 꼴로 주어졌을 때, y 를 x 의 음함수라 한다. x 의 함수 y 가 음함수 $f(x,y) = 0$ 의 꼴로 주어질 때, y 를 x 의 함수로 보고 각 항을 x 에 대하여 미분하여 도함수 $\frac{dy}{dx}$ 를 구한다.

[항등식] 임의의 실수 θ 에 대해 $\left(\frac{e^{\theta} + e^{-\theta}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^{\theta} - e^{-\theta}}{2}\right)^2 = 1$

[1] 평면 위를 움직이는 점 $P(x, y)$의 위치가 아래와 같이 매개변수 u 의 함수로 주어질 때, 시각 $u = 0$ 에서 시각 $u = t\ (t \geq 0)$ 까지 점 P 가 그리는 곡선의 길이 s를 t 의 함수로 나타내시오.

$$x = u, \qquad y = \frac{e^u + e^{-u}}{2} \quad (u \geq 0)$$

[2] 음함수의 미분법을 이용하여, 문항 [1]에서 얻은 함수 $s(t)$ 의 역함수 $t(s)$의 도함수 $\frac{dt}{ds}$ 를 s 의 함수로 나타내시오. (단, 함수 $s(t)$ 의 역함수 $t(s)$가 존재하고 미분가능하다고 가정한다.)

[3] 문항 [1]에서 얻은 함수 $s(t)$ 의 역함수 $t(s)$ 를 변수 s 로 나타내시오.

[4] 문항 [3]에서 얻은 역함수 $t = t(s)$를 이용하여, 시각 $u = t$ 일 때 문항 [1]의 점 $P(x, y)$ 의 위치를 변수 s 의 함수로 나타내시오.

[5] 문항 [4]에서 얻은 x, y 에 대하여 $\sqrt{\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2}$ 을 구하시오.

<끝>

2014학년도 수시 1차 논술고사
자연계열 출제의도, 근거 및 예시답안

1 출제 의도

[문제 1]

[1] 자연수 n의 모든 약수의 개수와 모든 약수의 합을 구할 수 있는 논리력과 계산력을 평가하고 행렬의 곱에 대한 계산력과 일차방정식의 해를 구체적으로 구할 수 있는 계산력을 평가한다.

[2] (1) 평면 위에 반지름이 r인 원위에 놓여있는 점의 x좌표와 y좌표를 r과 동경을 이용하여 구체적으로 표현할 수 있는 이해력을 평가한다.
(2) 일차방정식의 해가 단 한 쌍 존재할 때 일차방정식을 구성하는 행렬의 성분들 간의 관계에 대한 이해력과 계산력을 평가한다.
(3) 행렬의 성분들로 정의된 $\det(A)$의 주어진 성질을 이용하여 연립방정식의 해의 존재성을 판단할 수 있는 논리력을 평가한다.

[3] 평면 위의 한 점과 각 θ라디안 회전시킬 때 얻는 점과의 관계에 대한 이해력을 평가한다. 또한 일차방정식을 구성하는 행렬의 성분들을 이용하여 일차방정식의 해의 존재성을 판단할 수 있는 논리력과 주어진 $\det(A)$의 성질에 대한 이해력을 평가한다. 또한 주어진 명제의 참 또는 거짓을 판별할 수 있는 논리력을 평가한다.

[4] 수렴하는 수열로 정의된 행렬들로 이루어진 수열의 수렴성에 대한 이해력과 계산력을 평가하고 일차방정식을 구성하는 행렬의 성분들을 이용하여 일차방정식의 해의 존재를 판단할 수 있는 논리력을 평가한다. 또한 주어진 명제의 참 또는 거짓을 판별할 수 있는 논리력을 평가한다.

[문제 2]

고등학교 교과과정에서 중요하게 다루는 미분과 적분에 관한 기초적인 개념과 결과를 잘 이해하고 활용할 수 있는지를 평가하고자 하였다. 시간 t를 매개변수로 하여 표현된 좌표 평면 위를 움직이는 점이 움직인 거리 s는 시간 t의 함수로 나타낼 수 있다. 이때 함수 s는 역함수 $t(s)$를 가진다. 이 경우 s를 새로운 매개변수로 하여 주어진 움직이는 점을 나타낼 수 있으며, 새로운 매개 변수 s에 대한 주어진 점의 속력은 항상 1이다. 이를 구체적인 매개변수로 표현된 좌표 평면을 움직이는 점을 예를 들어 알아보는 문제로 아래와 같은 사항을 평가하고자 하였다.

[1] 좌표 평면 위를 움직이는 점이 움직인 거리 s를 곡선의 길이를 구하는 정적분을 이용하여 시간 t의 함수로 정확하게 표현할 수 있는지 묻는 문제이다. 이 과정에서 매개변수 함수의 도함수와 정적분을 정확하게 구할 수 있는지 평가하고자 한다.

[2] 음함수 미분법을 이해하고 정확히 적용할 수 있는지를 묻는 문제이다. 이 과정에서 합성함수의 미분법을 정확하게 이해하고 있는지도 묻는다. 아울러 역함수를 먼저 구하지 않고도 역함수의 도함수를 구할 수 있

음을 이해하고 구할 수 있는지 평가하고자 한다.

[3] 문항 [1]에서 구한 함수 $s(t)$의 역함수 $t(s)$를 변수 s로 바르게 나타낼 수 있는지 묻는 것으로, 역함수의 개념을 이해하고 그를 구하는 과정에서 지수방정식, 이차방정식의 해를 문제에 주어지게 되는 조건에 맞게 구할 수 있는지 평가하고자 하였다.

[4] 문항 [3]의 결과를 이용하여 문항 [1]에서 주어진 점의 위치를 곡선의 길이 s를 새로운 매개변수로 하여 바르게 나타낼 수 있는지 묻는 문제이다. 문제를 해결하는 과정에서 함수의 합성과 지수함수와 자연로그함수의 관계를 알고 있는지도 평가한다.

[5] 문항 [4]에서 얻은 변수 s를 매개변수로 하여 표현된 문항 [1]에 주어진 점의 속력을 구할 수 있는지 묻는 문제이다.

2 출제 근거

[문제 1번]

● **제시문**

1. 수학 I, p13, 행렬의 정의, 금성출판사
2. 수학I 익힘책, p24, 역행렬이 존재할 필요충분조건, 좋은책 신사고
3. 수학I 익힘책, p27, 연립일차방정식의 풀이, 좋은책 신사고
4. 수학I 익힘책, p150, 무한수열의 수렴과 발산, 극한값의 계산, 좋은책 신사고

● **문제**

[1] 수학 I, p27, 행렬의 곱셈, 금성출판사, 수학, p126, 연립일차방정식, 좋은책 신사고

[2] (1) 수학, p247, 일반각 θ의 삼각함수, 좋은책 신사고

(2) 수학 II, p47, 삼각함수의 덧셈정리, 좋은책 신사고, 수학I 익힘책, p27, 연립일차방정식의 풀이, 좋은책 신사고

(3) 수학I 익힘책, p27, 연립일차방정식의 풀이, 좋은책 신사고

[3] 수학, p275, 삼각함수 사이의 관계, 좋은책 신사고, 수학I 익힘책, p27, 연립일차방정식의 풀이, 좋은책 신사고, 기하와 벡터, p18, 회전변환, 좋은책 신사고

[4] 수학I 익힘책, p150, 무한수열의 수렴과 발산, 극한값의 계산, 좋은책 신사고

[문제 2]

● **제시문**

곡선의 길이, 수능특강 적분과 통계, p55, EBS

합성함수의 미분법, 수학II 유형편, p65, 수능완성, EBS

음함수의 미분법, 수학II, pp138-139, 좋은책 신사고

항등식, 지수함수와 로그함수의 극한, 수학 II, p92, 좋은책 신사고

● **문제**

문항[1] 수학Ⅱ, 곡선의 길이, pp67-68, 좋은책 신사고
문항[2] 수학Ⅱ, 음함수의 미분법, pp138-139, 좋은책 신사고
문항[3] 수학, 역함수, pp230-231, 좋은책 신사고
문항[4] 수학, 합성함수, p227-229, 좋은책 신사고,
수능완성 수학I A형, 로그, p40, EBS
문항[5] 수능완성 적분과 통계, 속력, p 53, EBS

3 모범 답안

[문제 1]

[1] $h(2)=\begin{pmatrix} f(42) & g(8) \\ -f(14) & -g(7)\end{pmatrix}$, $f(42)=8,\ f(14)=4,\ g(8)=15,\ g(7)=8$이므로 $A=h(2)=\begin{pmatrix} 8 & 15 \\ -4 & -8\end{pmatrix}$이다. 그런데 $A^3=\begin{pmatrix} 32 & 60 \\ -16 & -32\end{pmatrix}$이므로 주어진 연립방정식은 $\begin{cases} 32x+60y = 1 \\ -16x-32y=0\end{cases}$ 이다. 그러므로 $A^3X=B$의 해는 $x=\frac{1}{2},\ y=-\frac{1}{4}$이다.

[2] (1) $a=r\cos\alpha,\ b=r\sin\alpha,\ c=r\cos\beta,\ d=r\sin\beta$ 이다. 따라서 $K=\begin{pmatrix} r\cos\alpha & r\cos\beta \\ r\sin\alpha & r\sin\beta\end{pmatrix}$이다.

(2) $\det(K)=r^2(\cos\alpha\sin\beta-\cos\beta\sin\alpha)=r^2\{\cos(-\alpha)\sin\beta+\cos\beta\sin(-\alpha)\}=r^2\sin(\beta-\alpha)$이다. 연립방정식 $KX=B$가 단 한 쌍의 해를 갖기 위해서는 $\det(K)\neq 0$이어야 하므로 $\beta-\alpha\neq n\pi$ (n은 정수)이다.

(3) $\det(f(A))=\det(AK)=\det(A)\det(K)$이다. 그런데 연립방정식 $AX=B$는 단 한 쌍의 해를 가지므로 $\det(A)\neq 0$이다. 만일 $\det(K)\neq 0$이면 $\det(f(A))\neq 0$이므로 $f(A)X=B$는 단 한 쌍의 해를 갖는다. 만일 $\det(K)=0$이면 $\det(f(A))=0$이므로 $f(A)X=B$의 해는 존재하지 않거나 무한히 많이 존재한다.

[3] "참"이다.

(증명) $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_1 \\ a_3\end{pmatrix}$이고 $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix} b \\ d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_2 \\ a_4\end{pmatrix}$이다. 따라서 $B=\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$로 놓으면 $BA=R_\theta$이고 $\det(B)=\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$이다. 그런데 연립방정식 $AX=O$가 단 한 쌍의 해를 가지면 $\det(A)\neq 0$이고 $\det(R_\theta)=\det(BA)=\det(B)\det(A)=\det(A)\neq 0$이므로 $R_\theta X=O$는 단 한 쌍의 해를 갖는다.

[4] "거짓"이다.

(반례) 행렬 $A_n=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{n}\end{pmatrix}$ 에 대하여 $\det(A_n)=\frac{1}{n}\neq 0$이므로 연립 방정식 $A_nX=B$의 해가 존재한다.

그런데 $\lim_{n\to\infty}A_n=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0\end{pmatrix}=A$이므로 $AX=B$로부터 $\begin{cases} 1x+0y=1 \\ 0x+0y=2\end{cases}$ 가 되어 해가 존재하지 않는다.

[문제 2]

[1] $f(u)=u,\ g(u)=\dfrac{e^{u}+e^{-u}}{2}$ 라고 하면 $f'(u)=1,\ g'(u)=\dfrac{e^{u}-e^{-u}}{2}$ 이므로

$$\{f'(u)\}^2+\{g'(u)\}^2=1+\frac{e^{2u}-2+e^{-2u}}{4}=\left(\frac{e^{u}+e^{-u}}{2}\right)^2$$

따라서 $s(t)=\displaystyle\int_0^t\sqrt{\{f'(u)\}^2+\{g'(u)\}^2}\ du=\int_0^t\frac{e^{u}+e^{-u}}{2}du$ 이므로

$$\boxed{s(t)=\frac{e^{t}-e^{-t}}{2},\ t\ge 0}$$

[2] 식 $s=\dfrac{e^{t}-e^{-t}}{2}$ 에서 t 를 s 의 함수로 보고, 음함수의 미분법을 사용하여 양변을 변수 s 에 대해 미분하면

$$1=\left(\frac{e^{t}+e^{-t}}{2}\right)\frac{dt}{ds}$$

한편, 제시문의 항등식에서 $\left(\dfrac{e^{t}+e^{-t}}{2}\right)^2-s^2=1$ 이고, 또한 $\dfrac{e^{t}+e^{-t}}{2}>0$ 이므로

$\dfrac{e^{t}+e^{-t}}{2}=\sqrt{s^2+1}$ 이다. 따라서

$$\boxed{\frac{dt}{ds}=\frac{1}{\sqrt{s^2+1}},\ s\ge 0}$$

[3] 문항 [1]에서 구한 식 $s(t)=\dfrac{e^{t}-e^{-t}}{2}$ 의 양변에 e^{t} 를 곱하여 정리하면

$$e^{2t}-2se^{t}-1=0$$

여기서 $e^{t}>0$ 이므로 $e^{t}=s+\sqrt{s^2+1}$. 따라서 구하는 역함수는

$$\boxed{t(s)=\ln\left(s+\sqrt{s^2+1}\right),\ s\ge 0}$$

[4] $e^{t}=e^{\ln(s+\sqrt{s^2+1})}=s+\sqrt{s^2+1}$, $\qquad e^{-t}=e^{-\ln(s+\sqrt{s^2+1})}=\dfrac{1}{s+\sqrt{s^2+1}}=\sqrt{s^2+1}-s$ 이므로

$x=t,\ y=\dfrac{e^{t}+e^{-t}}{2}$ 에서

$$\boxed{x(s)=\ln\left(s+\sqrt{s^2+1}\right),\quad y(s)=\sqrt{s^2+1},\ s\ge 0}$$

[5] $\dfrac{dx}{ds}=\dfrac{1+\dfrac{s}{\sqrt{s^2+1}}}{s+\sqrt{s^2+1}}=\dfrac{1}{\sqrt{s^2+1}},\quad \dfrac{dy}{ds}=\dfrac{s}{\sqrt{s^2+1}}$ 이므로

$$\left(\frac{dx}{ds}\right)^2+\left(\frac{dy}{ds}\right)^2=\frac{1}{s^2+1}+\frac{s^2}{s^2+1}=1$$

$$\boxed{\sqrt{\left(\frac{dx}{ds}\right)^2+\left(\frac{dy}{ds}\right)^2}=1}$$

[5-별해]

$s(t)=\displaystyle\int_0^t\sqrt{\{f'(u)\}^2+\{g'(u)\}^2}\ du$ 에서 $\dfrac{ds}{dt}=\sqrt{\{f'(t)\}^2+\{g'(t)\}^2}$ 이므로

$$\frac{dt}{ds} = \frac{1}{\sqrt{\{f'(t)\}^2 + \{g'(t)\}^2}}$$

한편, 합성함수의 미분법에 의하여 $\frac{dx}{dt} = f'(t) = \frac{dx}{ds}\frac{ds}{dt}$, $\frac{dy}{dt} = g'(t) = \frac{dy}{ds}\frac{ds}{dt}$

$$\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 = \left(\frac{dt}{ds}\right)^2 \left\{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2\right\} = \frac{\{f'(t)\}^2 + \{g'(t)\}^2}{\{f'(t)\}^2 + \{g'(t)\}^2} = 1$$

따라서

$$\sqrt{\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2} = 1$$