2018학년도 모의논술고사 예시답안 (자연계)

수학

(1)

선분 B_0C_0와 B_1C_1가 서로 평행이고, 선분 OA와 수직이므로

삼각형 OB_0C_0와 OB_1C_1도 서로 닮은 이등변삼각형이다.

따라서 $\overline{B_0C_0} : \overline{B_1C_1} = \overline{OA_1} : \overline{OA_2}$.

$\angle BOC = 60^\circ$ 이므로 삼각형 OB_0C_0와 OB_1C_1 모두 정삼각형이다.

따라서 삼각형 $A_1B_1C_1$과 OB_1C_1은 합동인 정삼각형이다.

따라서 $\overline{OA_1} = 2\,\overline{OA_2}$.

그러므로 $\overline{B_1C_1} = \dfrac{1}{2}\overline{B_0C_0}$.

같은 방법을 이용하면 $\overline{B_{k+1}C_{k+1}} = \dfrac{1}{2}\overline{B_kC_k}$이다.

$\overline{B_0C_0} = a$이므로 $\overline{B_kC_k} = a\left(\dfrac{1}{2}\right)^k = \dfrac{a}{2^k}$.

한 변의 길이가 x인 정삼각형의 넓이는 $\dfrac{\sqrt{3}\,x^2}{4}$이고, 둘레의 길이는 $3x$이므로,

$S_4 = \dfrac{\sqrt{3}}{4}\left(\dfrac{a}{2^4}\right)^2 = \dfrac{\sqrt{3}\,a^2}{1024}$이고, $L_4 = 3 \times \dfrac{a}{2^4} = \dfrac{3a}{16}$.

(2)

삼각형 $A_0B_0C_0$와 $A_1B_1C_1$가 서로 닮은 삼각형이므로 $\overline{B_0C_0} : \overline{B_1C_1} = \overline{A_0A_1} : \overline{A_1A_2}$.

$\angle BOA = 45^\circ$ 이므로 $\overline{B_0A_1} = \overline{OA_1}$, $\overline{B_1A_2} = \overline{OA_2}$.

따라서 $\overline{B_1A_2} = x$라고 하면 $\overline{A_1A_2} = \dfrac{3x}{2}$이므로 $\overline{OA_2} = x$, $\overline{OA_1} = \overline{OA_2} + \overline{A_1A_2} = x + \dfrac{3x}{2} = \dfrac{5x}{2}$.

(1)에서와 마찬가지로 삼각형 OB_0C_0와 OB_1C_1가 서로 닮은 이등변삼각형이다.

$\overline{B_0C_0} : \overline{B_1C_1} = \overline{OA_1} : \overline{OA_2} = \dfrac{5x}{2} : x = 5 : 2$이므로 $\overline{B_1C_1} = \dfrac{2}{5}\overline{B_0C_0}$.

같은 방법을 이용하면 $\overline{B_{k+1}C_{k+1}} = \dfrac{2}{5}\overline{B_kC_k}$이다.

$\overline{B_0C_0} = 4b$이므로 $\overline{B_kC_k} = 4b\left(\dfrac{2}{5}\right)^k$.

따라서 $S_k = \dfrac{1}{2} \times 4b\left(\dfrac{2}{5}\right)^k \times 3b\left(\dfrac{2}{5}\right)^k = 6b^2\left(\dfrac{4}{25}\right)^k$이므로 $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} S_k = \frac{6b^2}{1-\frac{4}{25}} = \frac{50b^2}{7}$.

(3)

$\overline{\mathrm{B_0A_1}}=2$이고 $\angle\mathrm{BOA}=\theta$이므로 $\overline{\mathrm{OA_1}}=\dfrac{2}{\tan\theta}$.

$\overline{\mathrm{B_1A_2}}=x$라고 하면 $\overline{\mathrm{OA_2}}=\dfrac{x}{\tan\theta}$이고 $\overline{\mathrm{A_1A_2}}=\dfrac{3x}{2}$.

따라서 $\dfrac{2}{\tan\theta}=\dfrac{x}{\tan\theta}+\dfrac{3x}{2}$이므로 $x=\dfrac{4}{2+3\tan\theta}$.

(1), (2)에서와 마찬가지로 삼각형 $\mathrm{OB_0C_0}$와 $\mathrm{OB_1C_1}$가 서로 닮은 이등변삼각형이다.

$\overline{\mathrm{B_0C_0}}:\overline{\mathrm{B_1C_1}}=\overline{\mathrm{B_0A_1}}:\overline{\mathrm{B_1A_2}}=2:x=2:\dfrac{4}{2+3\tan\theta}$이므로 $\overline{\mathrm{B_1C_1}}=\dfrac{2}{2+3\tan\theta}\overline{\mathrm{B_0C_0}}$.

같은 방법을 이용하면 $\overline{\mathrm{B}_{k+1}\mathrm{C}_{k+1}}=\dfrac{2}{2+3\tan\theta}\overline{\mathrm{B}_k\mathrm{C}_k}$이고 $\overline{\mathrm{B_0C_0}}=4$이므로

$\overline{\mathrm{B}_k\mathrm{C}_k}=4\left(\dfrac{2}{2+3\tan\theta}\right)^k$.

따라서 $L_k=\left(1+\dfrac{\sqrt{13}}{4}+\dfrac{\sqrt{13}}{4}\right)\overline{\mathrm{B}_k\mathrm{C}_k}=(4+2\sqrt{13})\left(\dfrac{2}{2+3\tan\theta}\right)^k$이므로

$$\sum_{k=0}^{\infty}L_k=\frac{4+2\sqrt{13}}{1-\dfrac{2}{2+3\tan\theta}}=\frac{(4+2\sqrt{13})(2+3\tan\theta)}{3\tan\theta}.$$

(4)

$$f(\theta)=\frac{6\sin\theta}{2+\sqrt{13}}\frac{(4+2\sqrt{13})(2+3\tan\theta)}{3\tan\theta}=(8+12\tan\theta)\cos\theta$$
$$=8\cos\theta+12\sin\theta.$$

$f'(\theta)=-8\sin\theta+12\cos\theta=4\cos\theta(3-2\tan\theta)$.

$30^\circ\le\theta\le 60^\circ$일 때, $\dfrac{1}{\sqrt{3}}\le\tan\theta\le\sqrt{3}$이므로, 이 구간에 $\tan\theta=\dfrac{3}{2}$인 θ가 존재한다.

$\dfrac{1}{\sqrt{3}}\le\tan\theta<\dfrac{3}{2}$일 때 $f'(\theta)>0$이고, $\dfrac{3}{2}<\tan\theta\le\sqrt{3}$일 때 $f'(\theta)<0$이므로,

$\tan\theta=\dfrac{3}{2}$인 θ에서 $f(\theta)$는 최대가 된다.

$\tan\theta=\dfrac{3}{2}$이고 $30^\circ\le\theta\le 60^\circ$이므로, $\sin\theta=\dfrac{3}{\sqrt{13}}$, $\cos\theta=\dfrac{2}{\sqrt{13}}$.

따라서 $f(\theta)$는 $\tan\theta=\dfrac{3}{2}$일 때 최댓값 $\dfrac{52}{\sqrt{13}}=4\sqrt{13}$을 가진다.

$f(\theta)$는 $\theta=30^\circ$일 때 $4\left(\sqrt{3}+\dfrac{3}{2}\right)$이고, $\theta=60^\circ$일 때 $4\left(1+\dfrac{3\sqrt{3}}{2}\right)$인데,

$\sqrt{3}+\dfrac{3}{2}<\dfrac{3\sqrt{3}}{2}+1$이므로,

$f(\theta)$는 $\theta=30^\circ$일 때 최솟값 $4\left(\sqrt{3}+\dfrac{3}{2}\right)=4\sqrt{3}+6$을 가진다.

2018학년도 모의논술고사 예시답안 (자연계)

물리

[논제 II-1]

물체 A의 낙하 거리 $s_1 = \frac{1}{2}gt^2 = \frac{1}{2} \times g \times 4^2 = 8g$ (1)

물체 B의 낙하 거리 $s_2 = v_0 t + \frac{1}{2}gt^2 = v_0 + \frac{1}{2}g$ (2)

충돌 시 $s_1 = s_2$이므로 식(1), (2)를 이용하여 $8g = v_0 + \frac{1}{2}g$ (3)

식(3)으로부터 물체 B의 초기 속도 $v_0 = \frac{15}{2}g = 75\,(\mathrm{m/s})$이다.

충돌 할 때까지 물체 A, B의 낙하거리는 $s_1 = \frac{1}{2}gt^2 = 8g = 80\,(\mathrm{m})$이다.

(또는 $s_2 = v_0 t + \frac{1}{2}gt^2 = v_0 + \frac{1}{2}g = 75 + \frac{1}{2} \times 10 = 80\,(\mathrm{m})$이다.)

[논제 II-2]

평형상태를 위해 힘의 평형과 돌림힘의 평형을 모두 만족해야 한다.
힘의 평형: $F_O + F_P = (\text{균일한 막대의 무게}) + (\text{벽돌의 무게})$
돌림힘의 평형: (중심축을 O점으로) (시계 방향 돌림힘의 합) = (반시계 방향 돌림힘의 합)

두 받침점이 막대에 위쪽으로 작용하는 힘의 합력($F_o + F_P$)은 아래쪽으로 작용하는 막대와 벽돌의 무게의 합($30\mathrm{N} + 30\mathrm{N}$)과 같다.
따라서 $F_o + F_P = 30\mathrm{N} + 30\mathrm{N} = 60\mathrm{N}$ (1)
O점을 회전축으로 할 때 시계방향으로 작용하는 돌림힘은 시계 반대 방향으로 작용하는 돌림힘과 같다.
따라서 $(30\mathrm{N} \times 2.5\mathrm{m}) + (30\mathrm{N} \times 5\mathrm{m}) = (F_\mathrm{o} \times 0\mathrm{m}) + (F_\mathrm{P} \times 4\mathrm{m})$ (2)
식(1), (2)를 연립하여 풀면 $F_o = 3.75\mathrm{N}$, $\mathrm{F_P} = 56.25\mathrm{N}$ 이다.

[논제 II-3]

전기장 내의 힘 $F = qE$이고, 이동거리가 d이므로,
전하량 q인 점전하가 +x 방향의 전기장에 의해 d만큼 이동하는 동안 전기력이 한 일은 $W_1 = F_1 d = qEd = E_K$ (1) 이다.
이 때 전기력이 한 일만큼 운동 에너지(E_K)가 증가한다.
$-x$ 방향의 전기장에 의해 같은 양의 일
$W_2 = F_2 x = q(-3E)x$ (x : 점전하가 멈출 때까지 이동거리) (2)
을 하여 운동 에너지가 0이 되어야 하므로 전하가 멈추기까지 받은 일의 총 합은 $W_1 + W_2 = \Delta E = 0$이다.
따라서 전하가 이동한 거리 $qEd - q3Ex = 0$이므로 $\therefore x = \dfrac{d}{3}$ 이다.

[논제 II-4]

도체는 전도띠와 원자가띠가 일부 겹쳐져 있고 약간의 에너지만 흡수해도 전자는 전도띠로 이동하여 고체안을 자유롭게 이동할 수 있기 때문에 전기 전도도가 매우 크다 (전류가 잘 흐른다).
절연체는 원자가띠와 전도띠의 띠틈이 매우 넓어서 전도띠로 전자가 이동하는 것이 거의 불가능하기 때문에 전기 전도도가 매우 작다 (전류가 거의 흐르지 않는다).
반도체는 절연체보다 띠틈이 좁아서 전자가 띠큼보다 큰 일정량의 에너지를 흡수하면 전도띠로 이동하여 전류가 흐를 수 있다. 따라서 전기 전도도가 절연체보다 크다.

2018학년도 모의논술고사 예시답안 (자연계)

화학

<논제 II-1> (20점)

(1) (6점)

- 1987년: 톰슨의 음극선 실험으로부터 **전자**를 발견하게 되었고 이는 더 이상 쪼개질 수 없는 입자로서 여겨졌던 원자가 전자와 (+)전하를 띠는 물질로 더 나뉠 수 있음을 보였다. 이로부터 (+)전하에 전자가 박혀 있는 형태의 원자모형이 제안되었다.
- 1911년: 러더퍼드의 α입자 산란 실험으로부터 (+)전하를 띤 **원자핵**이 발견되었고 원자는 대부분이 비어있는 공간으로 존재하며 전자가 원자핵 주위를 운동하고 있는 원자모형이 제안되었다.
- 1932년: 채드윅의 실험으로부터 **중성자**가 발견되었고 양성자만으로 설명할 수 없었던 헬륨의 원자핵의 질량을 설명할 수 있었다. 따라서 원자 내의 원자핵은 중성자와 양성자가 뭉쳐져 있는 원자모형으로 발전하게 되었다.

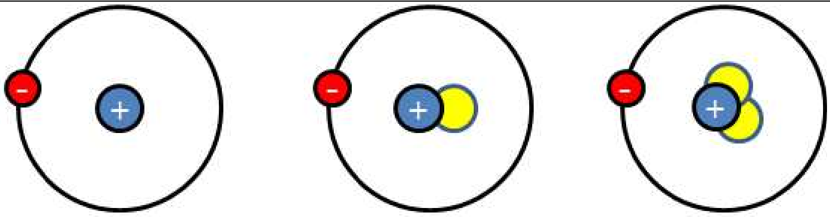
- 상기의 해당년도 실험을 상기의 문장의 의미가 포함된 그림으로 표현하여도 모두 정답으로 인정함.

(2) (5점)

1911년 이전의 원자모형에 의하면 α입자는 원자를 통과하여 경로가 거의 휘지 않을 것으로 예측되었으나, 실험결과 대부분의 α입자들은 거의 휘지 않고 금박을 통과하지만 소수의 α입자는 약간 휘어져 나가며 극소수의 α입자들은 튕겨 나오는 것이 관찰되었다.

(3) (9점)

제시문에서 동위 원소의 원자는 모두 같은 원자번호를 갖게 되며 원자번호는 양성자수와 같다고 하였고, 질량수는 양성자수와 중성자수의 합이므로 수소, 중수소, 삼중수소의 각각의 원자수, 전자수, 중성자 수는 다음과 같다. 수소의 전자수는 1, 양성자수 1, 중성자수는 0이며, 중수소의 전자수는 1, 양성자수 1, 중성자수는 1이고, 삼중수소의 .전자수는 1, 양성자수 1, 중성자수는 2이다. 또한, 1911년 러더포드의 실험에 의하면 원자는 양전하를 띈 원자핵을 중심에 가지면 전자는 핵주위를 운동한다고 했고, 채드윅의 실험에서는 원자핵은 양성자와 중성자를 포함한다는 것을 증명하였다. 이때 각 원소는 모두 한 개의 전자와 양성자를 갖고 있고, 중성자만이 다르므로 다음과 같이 표현할 수 있다.



<논제 II-2> (20점)

(1) (12점)

문제에서 염화칼슘 관이 14.4g 증가하였으므로 물이 14.4g이 생성되었다. 그리고 수산화나트륨 관이 52.8g이 증가하였으므로 이산화탄소는 52.8g이 생성되었다.

물의 몰수 = 14.4/18 = 0.8몰

이산화탄소의 몰수 = 52.8/44 = 1.2몰

따라서, H의 몰수는 1.6몰 (1.6g), 탄소는 1.2몰 (14.4g) 존재한다. 두 원소의 질량의 합은 16g으로 연소 전 아스코브산의 질량 35.2g 보다 작다. 완전 연소 결과 이산화탄소와 물만 생성되었으므로 **아스코브산에는 산소가 같이 존재**한다.

아스코브산에 존재하는 **산소의 질량은 35.2 - 14.4 - 1.6 = 19.2g이고 몰수는 1.2몰**이다.

따라서 아스코브산의 탄소, 수소, 산소 몰수비는 1.2 : 1.6 : 1.2 = 3 : 4: 3이다.

즉, **아스코브산의 실험식은** $C_3H_4O_3$이고 실험식량은 88이다. 아스코브산의 분자량이 176이므로 **아스코브산의 분자식은** $C_6H_8O_6$이다.

아스코브산의 연소반응식은 다음과 같다.

$$C_6H_8O_6(s) + 5O_2(g) \rightarrow 6CO_2(g) + 4H_2O(g)$$

(2) (8점)

질소와 수소 반응에 의한 암모니아 생성 반응은 다음과 같다.

$$N_2(g) + 3H_2(g) \rightleftarrows 2NH_3$$

반응 전 N과 H의 산화수는 각각 0이다. 암모니아에서 N과 H의 산화수는 각각 -3, +1이다. 따라서 암모니아가 생성되면서 **N은 환원**되고, **H는 산화**된다.

염기성 물질인 암모니아는 아레니우스의 산-염기 개념으로는 설명할 수 없지만 **브뢴스테드-로우리의 확장된 산-염기 개념으로는 설명할 수 있다.** 암모니아가 물에 용해되는 반응식은 다음과 같다.

$$NH_3(g) + H_2O(l) \rightleftarrows NH_4^+(aq) + OH^-(aq)$$

위 반응식에서 보는 바와 같이 NH_3는 H_2O와 반응하여 NH_4^+와 OH^-로 이온화된다. 이때 **NH_3는 물로부터 H^+를 받아 NH_4^+가 되므로 염기**이고, **H_2O는 NH_3에게 H^+를 주고 OH^-가 되므로 산**이다.

2018학년도 모의논술고사 예시답안 (자연계)

생명과학

(1) 몸에 병원체가 들어오게 되면 항생제를 투여하여 병원체를 제거 하려 한다. 항생제는 동식물이 가지는 것과는 다른 성분을 목표로 하여 만들게 된다. 하지만, 이 경우 항생제는 병원성균 뿐만 아니라 유익한 균 또한 죽이게 된다. 사람에게 유익한 균에는 다양한 종류가 있으며, 이들은 사람과 상리 공생 또는 편리 공생 등을 포함한 다양한 상호 작용을 이루어 생태계를 이루게 되며, 이러한 관계에 영향을 주는 항생제는 비생물적 요인이 된다. 또한 미생물은 사람 주변 생태계에서 생물적 요인으로 작용하게 된다. 비 생물적 요인인 항생제에 의하여 생물적인 요인인 미생물에 변화가 발생하게 되며 이는 결과적으로 생태계를 교란하게 되어 사람에게도 또한 영향을 줄 수 있게 된다.

(2) 백신은 미리 병원체에 대한 항원을 투여하여 이에 대한 항체를 미리 만들어 놓게 한다. 하지만, 유전자가 복제되어 자손을 만들 경우 또는 다양한 외부 요인에 의하여 돌연변이 균의 발생하게 된다. 이는 생물에 다양성을 주는 중요한 요인이기도 하다. 하지만, 백신을 만들기 위해 사용한 항원에도 돌연변이가 발생 할 수 있으며 이 변이를 가진 병원체는 기존에 만들어진 항체와 반응을 하지 못하게 된다. 따라서 이 변이 균은 백신의 작용을 피할 수 있게 되어 병을 일으킬 수 있게 된다.

(3) 다원의 자연 선택설은 생물은 주어진 환경이 허용하는 것 보다 많은 자손을 만들게 된다, 자손을 만들기 위해서는 유전물질인 DNA의 복제가 일어나야 하며 이 경우 다양한 변이 균이 발생 할 수 있다. 그 결과 집단의 개체들 간에는 형질에서 조금씩 차이가 다른 변이들이 존재하게 된다. 이 변이 개체들 중 항생제에 저항성을 가지는 균이 존재 할 수 있다. 항생제를 사용하지 않을 경우에는 이 균이 자연 선택될 이유가 없기 때문에 항생제에 저항성이 있는 균이 증가할 이유가 없다. 하지만 항생제의 오남용은 항생제에 민감한 균의 수는 감소하게 할 것이고 항생제에 저항성이 있는 균은 생존에 유리하게 되어 더 잘 살 게 된다. 따라서 항생제의 오남용은 항생제에 저항성이 있는 균의 발생을 증가 시키는 역할을 하게 되어 발생 빈도를 증가 시킨다.