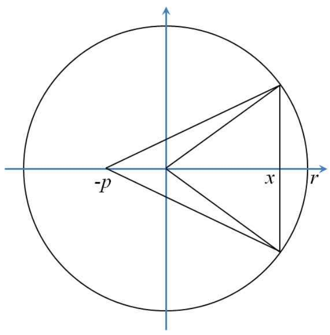
<2017학년도 경희대학교 모의논술고사>

예 시 답 안 (의학계-수학)

<논제 I> 수학

논제I-(1)



삼각형 OAB에서 점 A와 점 B는 원주에 있는 점들이므로, 중심 O와 두 점의 중점을 지나는 직선을 x축으로 하는 xy좌표를 왼쪽 그림과 같이 생각할 수 있다. 중심 O와 선분 AB와의 거리를 x라고 하면, 삼각형 OAB의 넓이는 $x\sqrt{r^2-x^2}$이다. 이 때, 삼각형을 이루는 x의 범위는 $0<x<r$이다. 이 넓이를 x에 대하여 미분하면, $\dfrac{r^2-2x^2}{\sqrt{r^2-x^2}}$이고, $x<\dfrac{r}{\sqrt{2}}$이면 양, $x>\dfrac{r}{\sqrt{2}}$이면 음이므로, $x=\dfrac{r}{\sqrt{2}}$일 때, 최대가 되고 삼각형 OAB의 최대넓이는 $\dfrac{r^2}{2}$이 된다.

삼각형 PCD의 최대넓이를 구하는 데에 있어서, 동일한 길이의 선분 CD가 주어져 있을 때, 가장 큰 넓이를 가지게 되려면, 점 P와 선분 CD와의 거리가 가장 크게 되기 위하여 위의 그림처럼 삼각형 PCD가 이등변삼각형이 되어야 한다. 따라서, 위의 그림에서와 같이 점 P의 좌표를 $(-p,0)$이라고 하고, 삼각형 OAB의 최대넓이를 구하는 경우와 동일한 방법으로 이등변삼각형 PCD의 최대넓이를 구하는 것으로 충분하다.

이 때, 삼각형 PCD의 넓이는 $(x+p)\sqrt{r^2-x^2}$이고, $-r<x<0$인 경우에는 넓이가 더 큰 경우가 존재하므로, x의 범위를 $0\le x<r$로 하면 된다. 이 넓이를 x에 대하여 미분하면, $\dfrac{r^2-2x^2-px}{\sqrt{r^2-x^2}}$이고, $x<\dfrac{-p+\sqrt{p^2+8r^2}}{4}$이면 양, $x>\dfrac{-p+\sqrt{p^2+8r^2}}{4}$이면 음이므로, $x=\dfrac{-p+\sqrt{p^2+8r^2}}{4}$일 때, 최대가 되고 삼각형 PCD의 최대넓이는 $\dfrac{3p+\sqrt{p^2+8r^2}}{4}\sqrt{\dfrac{r^2}{2}-\dfrac{p^2}{8}+\dfrac{p}{8}\sqrt{p^2+8r^2}}$ 이 된다.

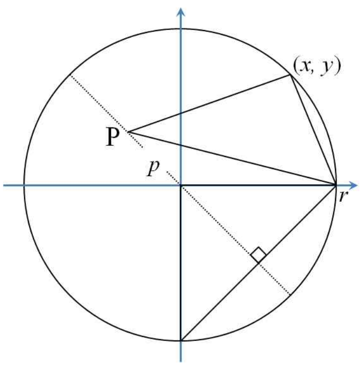
논제I-(2)

$\dfrac{S_2(t)}{S_1(t)}=\dfrac{1}{2}\left(3\dfrac{g(t)}{f(t)}+\sqrt{\left\{\dfrac{g(t)}{f(t)}\right\}^2+8}\right)\sqrt{\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{8}\left\{\dfrac{g(t)}{f(t)}\right\}^2+\dfrac{1}{8}\dfrac{g(t)}{f(t)}\sqrt{\left\{\dfrac{g(t)}{f(t)}\right\}^2+8}}$ 이다. $0\le\dfrac{g(t)}{f(t)}<1$이므로, $0\le\lim\limits_{t\to\infty}\dfrac{g(t)}{f(t)}\le 1$이다. 함수 $F(x)$를 $F(x)=\dfrac{3x+\sqrt{x^2+8}}{2}\sqrt{\dfrac{1}{2}-\dfrac{x^2}{8}+\dfrac{x}{8}\sqrt{x^2+8}}$ 으로 $0\le x\le 1$에서 정의하자. $G(x)=\dfrac{1}{2}-\dfrac{x^2}{8}+\dfrac{x}{8}\sqrt{x^2+8}$이라 하면, $G'(x)=\dfrac{(x-\sqrt{x^2+8})^2}{8\sqrt{x^2+8}}>0$이므로, $F(x)$는 증가함수인 $\dfrac{3x+\sqrt{x^2+8}}{2}$과 $\sqrt{G(x)}$의 곱이므로, $0\le x\le 1$에서 증가함수이다. 그러므로, $1=F(0)\le F\left(\lim\limits_{t\to\infty}\dfrac{g(t)}{f(t)}\right)\le F(1)=\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$가 되고, 함수 $F(x)$는 연속함수이므로, 사이값 정리에 의해서, 임의의 $1<k<\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$에 대하여, $F(c)=k$인 $0<c<1$가 존재한다. 따라서, $\lim\limits_{t\to\infty}\dfrac{g(t)}{f(t)}=c$인 두 함수 $f(t)$와 $g(t)$를 선택하면 원하는 결과를 얻게 된다. 예를 들면, 연속함수 $f(t)$에 대해서, 함수 $g(t)$를 $g(t)=cf(t)$라고 놓으면 된다.

논제I-(3)

논제I−(1)의 답안으로부터 최대넓이를 갖는 삼각형 OAB는 직각이등변 삼각형이 됨을 알 수 있다. 그러므로 아래 그림과 같이 그 삼각형을 제4사분면에 위치하도록 그릴 수 있다. 그러면 점 P의 좌표는 $\left(-\frac{p}{\sqrt{2}}, \frac{p}{\sqrt{2}}\right)$가 된다. 그러면, 최대 넓이를 갖는 삼각형 PCD는 선분 CD가 선분 OP와 교차하는 경우와 그렇지 않은 경우의 2가지 경우로 나누어 생각해 볼 수 있다.

먼저, 선분 CD가 선분 OP와 교차하는 경우에, 최대 넓이를 갖는 삼각형 PCD는 논제I−(1)에서와 같이 이등변 삼각형으로 선분 CD가 선분 OP에 수직이면서 중점 O를 지나는 원의 지름이 되는 삼각형이 됨을 알 수 있다. 그 때의 넓이는 rp가 된다.



두 번째 경우에서는, 선분 CD의 길이가 동일할 때, 그 선분과 점 P와의 거리가 가장 큰 경우는 점 C 또는 점 D가 삼각형 OAB의 한 꼭짓점과 만날 때이므로, 그 점을 왼쪽 그림과 같이 $(r,0)$으로 가정해도 무방하다. 그러므로 삼각형 PCD의 넓이가 최대가 되도록 점 (x,y)만을 정하면 된다. (물론, 여기에서 $y=\sqrt{r^2-x^2}$이다.)

세 점의 좌표가 모두 있으므로, 점과 직선과의 거리를 이용하여 삼각형 PCD의 넓이를 구하면, $\frac{1}{2}\left|ry+\frac{p}{\sqrt{2}}(x+y-r)\right|$이 된다. 선분 CD가 선분 OP와 교차하지 않을 때까지, 즉 $-\frac{r^2p\sqrt{2}+r^3}{r^2+p^2+\sqrt{2}rp}<x<r$ 인 경우, $ry+\frac{p}{\sqrt{2}}(x+y-r)>0$ 이므로, 삼각형 PCD의 넓이는 $\frac{1}{2}\left(r\sqrt{r^2-x^2}+\frac{p}{\sqrt{2}}(x+\sqrt{r^2-x^2}-r)\right)$ 이고, x에 대하여 미분하면, $\frac{1}{2}\left(-\frac{rx}{\sqrt{r^2-x^2}}+\frac{p}{\sqrt{2}}-\frac{p}{\sqrt{2}}\frac{x}{\sqrt{r^2-x^2}}\right)=\frac{p\sqrt{r^2-x^2}-(\sqrt{2}r+p)x}{2\sqrt{2}\sqrt{r^2-x^2}}$ 이 된다. x가 음수이면 미분한 값이 양수이므로 넓이는 항상 증가하므로, $x\ge 0$에 대해서만 고려하면 된다. x가 $\frac{rp}{\sqrt{2r^2+2\sqrt{2}rp+2p^2}}$을 기준으로 작으면 양, 크면 음이므로, $x=\frac{rp}{\sqrt{2r^2+2\sqrt{2}rp+2p^2}}$ 일 때 최대가 되고, 이 때 삼각형 PCD의 최대넓이는 $\frac{r}{2}\sqrt{r^2+\sqrt{2}rp+p^2}-\frac{rp}{2\sqrt{2}}$이 된다.

두 경우를 종합하면, $\lambda=\sqrt{4+2\sqrt{2}}-1/\sqrt{2}$이라고 할 때, $0\le p\le r/\lambda$ 이면 최대넓이는 $\frac{r}{2}\sqrt{r^2+\sqrt{2}rp+p^2}-\frac{rp}{2\sqrt{2}}$이고, $r/\lambda<p<r$ 이면 rp가 됨을 알 수 있다.

논제I-(4)

p가 상수이므로, 반지름 r이 충분히 크다고 하면, p는 부등식 $0\le p\le r/\lambda$ 을 만족할 수밖에 없다. 따라서 충분히 큰 반지름 r에 대하여, $S_2=\frac{3p+\sqrt{p^2+8r^2}}{4}\sqrt{\frac{r^2}{2}-\frac{p^2}{8}+\frac{p}{8}\sqrt{p^2+8r^2}}$ 이고 $S_3=\frac{r}{2}\sqrt{r^2+\sqrt{2}rp+p^2}-\frac{rp}{2\sqrt{2}}$이다. 따라서

$$\lim_{r\to\infty}\frac{S_3}{S_2}=\lim_{r\to\infty}\frac{\frac{r}{2}\sqrt{r^2+\sqrt{2}rp+p^2}-\frac{rp}{2\sqrt{2}}}{\frac{3p+\sqrt{p^2+8r^2}}{4}\sqrt{\frac{r^2}{2}-\frac{p^2}{8}+\frac{p}{8}\sqrt{p^2+8r^2}}}$$

를 계산하면 된다. $\lim_{r\to\infty}\frac{p}{r}=0$이므로,

$\lim_{r\to\infty}\frac{S_3}{S_2}$는 수렴하고, 그 극한값은 $\frac{\frac{1}{2}}{\frac{2\sqrt{2}}{4}\sqrt{\frac{1}{2}}}=1$이다.

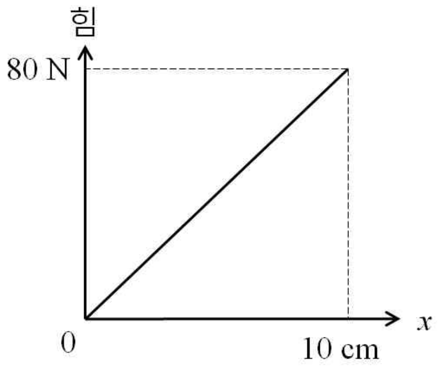
예 시 답 안 (의학계-물리)

<논제 Ⅱ> 물리

논제Ⅱ-(1)

(a) 컵을 x만큼 들어 올릴 때 액체 표면의 내려가는 깊이 d는 전체 액체의 부피가 변하지 않는다고 할 때, $A_{통}d = A_{컵}(d+x)$를 만족한다. 따라서 $d = \dfrac{A_{컵}}{A_{통} - A_{컵}}x = \dfrac{x}{2}$이다. 그림 (나)에서 액체의 표면과 점 P사이의 높이 차는 $x + d = \dfrac{3}{2}x$이므로 10 cm만큼 들어 올렸을 때 높이차는 15 cm이고 P점의 액체의 압력은 대기압인 1기압보다 $\dfrac{15\,\mathrm{cm}}{75\,\mathrm{cm}} \times 1$ 기압만큼 낮은 $\dfrac{4}{5}$기압 또는 약 80000 Pa이다.

(b) 컵을 x만큼 들어 올릴 때 그림 (나)에서 액체의 표면과 점 P사이의 높이 차는 $x + d = \dfrac{3}{2}x$이므로 컵 바닥면의 압력 차이는 $\Delta P = \dfrac{3}{2} \times \dfrac{x}{75\,\mathrm{cm}} \times 100000\,\mathrm{N/m^2}$이고 컵을 들어올리기 위해 필요한 힘은 $(\Delta P)A = \dfrac{3}{2} \times \dfrac{x}{75\,\mathrm{cm}} \times 100000\,\mathrm{N/m^2} \times 0.004\,\mathrm{m^2} = 8x\,\mathrm{N/cm}$이다. 따라서 힘은 x에 정비례하며 $x = 10\,\mathrm{cm}$일 때의 힘은 80 N이다. 그래프로 나타내면 다음과 같다.



(c) 10 cm 들어 올릴 때까지 한 일은 위 그래프의 아래 면적으로 4 J이다.

* 위의 문제를 풀기 위해 다른 접근 방법을 사용할 수 있으며, 그 방법의 논리가 타당하면 정답이다.

논제Ⅱ-(2)

논제 II-1의 결과를 이용하면 조수 간만의 차이가 h이고 호수 면적이 A라고 할 때 퍼텐셜 에너지는 $\dfrac{(\Delta P)Ah}{2}$ (또는 $\dfrac{\rho g A h^2}{2}$)이다. 시화호에서 h가 5 m이므로 ΔP는 1기압의 절반인 약 $5 \times 10^4\,\mathrm{Pa}$이고 A는 $44 \times 10^6\,\mathrm{m^2}$이므로 퍼텐셜 에너지는 약 $5.5 \times 10^{12}\,\mathrm{J}$이다. 하루에 두 번씩 밀물과 썰물이 있으므로 위의 퍼텐셜 에너지를 이용하여 발전하는 시간은 약 6시간이다. 따라서 발전 용량은 대략 $\dfrac{5.5 \times 10^{12}\,\mathrm{J}}{2.2 \times 10^4\,\mathrm{s}}$로 약 250 MW 정도이다.

* 실제 시화호 조력 발전소의 최대 발전용량은 약 250 MW이다. 어림계산을 하는 것이기 때문에 논리적인 전개과정이 맞고 실제 값과 아주 다르지 않은 값을 어림한 경우에는 어림값이 정확하지 않더라도 정답이다. 또한 풀이과정에서 모범답안과 다른 접근방법을 사용한 경우에도 논리가 타당한 경우에는 정답이다

예 시 답 안 (의학계-화학)

<논제 Ⅱ> 화학

논제Ⅱ－(1)
스티렌 연소 반응의 화학 반응식은 아래와 같다.

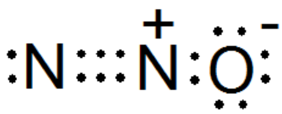
$$C_8H_8(l) + 10O_2(g) \rightarrow 8CO_2(g) + 4H_2O(l)$$

C와 H의 원자량을 각각 12.0 g/mol과 1.0 g/mol이라 하면, 스티렌의 분자량은 104 g/mol이다. 스티렌 1 g 당 방출되는 열이 42.6 kJ이므로 위 반응의 반응 엔탈피(ΔH)는
104 g/mol × −42.6 kJ/g = −4,430.4 kJ/mol이다.

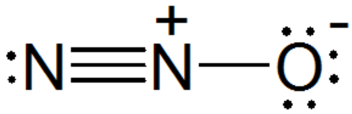
반응 엔탈피(ΔH)는 생성물의 엔탈피 합에서 반응물의 엔탈피 합을 빼준 값이고 주어진 조건은 25 ℃, 1기압이므로 $O_2(g)$, $CO_2(g)$, $H_2O(l)$의 생성열은 각각 0, −393.5, −285.8 kJ/mol이다.

스티렌의 생성열을 a kJ/mol이라 하면,
8×(−393.5 kJ/mol) + 4×(−285.8 kJ/mol) − (a kJ/mol + 10×0 kJ/mol) = −4,430.4 kJ/mol,
a kJ/mol = 4,430.4 kJ − 3,148 kJ/mol − 1,143.2 kJ/mol = 139.2 kJ/mol이 된다.

논제Ⅱ－(2)
(1) N은 원자가 전자가 5개인 원소이고 O는 원자가 전자가 6인 원소이다. N_2O의 전자점식은 아래와 같이 각 원자는 주변에 8개씩의 전자를 가지고 있어 옥텟 규칙을 만족한다. 중심의 N 원자는 다른 N 원자와 삼중 결합을 하고, O 원자와는 단일 결합을 하고 있다.



또는



(2) 중심 원자인 N에는 비공유 전자가 존재하지 않고 하나의 단일 결합과 하나의 삼중 결합이 존재한다. 중심 원자인 N은 결합 전자쌍의 개수가 4개이나 세 개의 전자쌍이 삼중결합을 하고 있고 나머지 한 쌍이 단일결합을 하고 있다. 따라서 중심 원자 N에는 비공유 전자쌍이 존재하지 않으면서 두 개의 공유 전자쌍을 갖는 형태이므로, 공유 전자쌍 간의 반발력을 최소화하기 위해서는 두 개의 공유 전자쌍이 서로 반대 방향으로 향하게 되어 N_2O는 입체 구조로 선형 구조를 갖는다.

예 시 답 안 (의학계-생명과학)

<논제 Ⅱ> 생명과학

논제Ⅱ-(1)

(1) 알도스테론은 신장에서 Na^+을 재흡수하고, K^+을 배설하는 역할을 하고 있다. 따라서 알도스테론이 결핍되면 혈중 Na^+는 감소하고, K^+는 증가하게 된다. (2) Na^+의 재흡수가 감소하면서 이와 더불어 물의 재흡수 역시 감소하므로 혈액량이 감소하므로 혈압이 낮아진다. (3) 물의 배설이 증가하여 체내의 수분이 감소하므로 체중 역시 감소하게 된다. (4) 세포 외액에서 커다란 부분을 차지하는 Na^+ 농도가 감소하면서 세포 외액이 저장액 상태가 된다. 따라서 세포 외액의 물이 세포 내부로 들어오므로 세포 내부의 수분 함량이 높아진다.

논제Ⅱ-(2)

알도스테론의 결핍은 체액에서 Na^+ 농도의 감소와 K^+ 농도의 증가로 이어진다. 세포 밖의 K^+ 농도가 증가하면 휴지 상태에서 농도 구배에 따라 K^+이 세포 바깥으로 나가는 힘이 감소한다. 따라서 세포 내 양이온이 정상일 때보다 많아지고, 이에 따라 휴지 전위가 높아지므로 부분적인 탈분극 상태가 된다. 부분적인 탈분극은 약한 자극에도 신경 세포가 쉽게 역치에 도달하여 활동 전위를 만들도록 한다. 한편 세포 바깥의 Na^+ 농도의 감소는 활동 전위가 만들어질 때 농도 구배에 따라 Na^+가 유입되는 속도를 감소시키며, 세포 바깥의 K^+ 농도가 정상보다 높기 때문에 재분극이 일어나는 데에도 더 오랜 시간이 걸릴 것이다.

논제Ⅱ-(3)

제시문을 통해 우성으로 유전되는 연골무형성증은 이형 접합으로만 나타나며, 상염색체를 통해 유전되는 것임을 알 수 있다. 따라서 연골무형성증인 부모는 모두 이형 접합(Aa)이고, 정상인 부모는 모두 열성 동형 접합(aa)이다. 또한 연골무형성증과 상관없이 아들이 태어날 확률은 1/2이다. (1) 한쪽 부모가 연골무형성증인 경우(Aa × aa): 자손이 aa일 확률은 1/2이고, 아들일 확률은 1/2이므로 정상 신장의 아들이 태어날 확률은 1/4이다. (2) 양 부모 모두 연골무형성증인 경우(Aa × Aa): 자손이 aa일 확률은 1/4이고, 아들일 확률은 1/2이므로 정상 신장의 아들이 태어날 확률은 1/8이다.

논제Ⅱ-(4)

우성으로 유전되는 치명적인 유전병은 개체에게 영향을 미치지 않으면서 이형 접합으로 전달되지 못하므로 열성으로 유전되는 경우보다 훨씬 드물 것이다. 그러나 제시문 [바]의 FGFR 유전자에서 볼 수 있듯이 정상인 부모라 하더라도 생식 세포에 새로운 돌연변이가 계속해서 생길 수 있으며, 제시문 [사]의 헌팅턴병의 경우에 볼 수 있듯이 환자의 나이가 어느 정도 될 때까지 발병하지 않는다면 발병 이전에 자손을 낳아 문제의 유전자가 후손에게 전달될 수 있으므로 인구 집단 내에 계속해서 나타날 것이다.