

2017학년도 모의논술고사 예시답안 (자연계)

수학

[문제 I-1]

명제의 대우를 이용하면, $\tan \frac{\pi}{4} = 1$ 은 유리수이므로 제시문 [가]의 탄젠트 함수의 성질에 의하여

$\frac{\pi}{4}$ 는 무리수이다.

만약 π 가 유리수이면 유리수 집합은 곱셈에 대하여 닫혀 있으므로 $\frac{1}{4} \times \pi$ 도 유리수이다.

이것은 $\frac{\pi}{4}$ 는 무리수라는 사실에 모순이므로 π 는 무리수이다.

[문제 I-2]

π_1 이 π 에 가장 가깝게 되려면 오각형의 넓이가 최대가 되어야 한다.

그러면 오각형의 넓이는 삼각형OAC, 삼각형OCB, 삼각형BCD의 넓이의 합이다.

삼각형OAC, 삼각형OCB의 넓이는 각각 $\frac{1}{2} \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{4}$ 이다.

삼각형BCD의 넓이가 최대가 되는 경우는 변BC에서 D까지의 길이인 높이가 최대가 될 때이다.

이는 직선OD가 각BOC를 이등분하는 경우이므로 D의 좌표는

$$\left(\cos \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{8} \right), \sin \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{8} \right) \right) = \left(\cos \frac{3\pi}{8}, \sin \frac{3\pi}{8} \right) \text{이다.}$$

[문제 I-3]

오각형의 넓이는 삼각형OAE, 삼각형OEB, 삼각형BEF의 넓이의 합이다.

문제 I-2에서와 마찬가지로 각OEF과 각OFB가 같은 경우 넓이가 최대가 된다.

따라서 각OEF, 각OFB는 모두 $\frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{2} - a \right)$ 이다.

그러면 넓이의 최댓값은 $A(a) = \frac{1}{2} \sin a + 2 \times \frac{1}{2} \sin \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{2} - a \right) = \frac{1}{2} \sin a + \sin \left(\frac{\pi}{4} - \frac{a}{2} \right)$.

$\pi_2(a) = 4A(a) = 2 \sin a + 4 \sin \left(\frac{\pi}{4} - \frac{a}{2} \right)$ 이다.

π_2 가 π 에 가장 가까울 때는 $A(a)$ 가 최대가 될 때이다.

$$A'(a) = \frac{1}{2} \cos a - \frac{1}{2} \cos \left(\frac{\pi}{4} - \frac{a}{2} \right), \quad A''(a) = -\frac{1}{2} \sin a - \frac{1}{4} \sin \left(\frac{\pi}{4} - \frac{a}{2} \right) \text{이고}$$

$0 < a < \frac{\pi}{2}$ 이므로 $A''(a) < 0$ 이다. 따라서 $A'(a) = 0$ 인 $a = \frac{\pi}{4} - \frac{a}{2}$, 즉 $a = \frac{\pi}{6}$ 일때 최대가 된다.

$A \left(\frac{\pi}{6} \right) = \frac{3}{4}$ 이므로 π 에 가장 가까운 π_2 는 3이다.

[문제 I-4]

$y=0$ 과 l_G 의 교점을 N 이라고 하면, 삼각형COM과 삼각형GOM는 합동이므로 각COM과 각GOM은 b 이고, 각GON은 $\frac{\pi}{4}-2b$ 이다.

오각형의 넓이는 사각형ONMC의 넓이의 2배이고,

사각형ONMC의 넓이는 삼각형COM, 삼각형GOM, 삼각형MON 넓이의 합이다.

$$\text{그러면 넓이는 } B(b) = 2\left(2 \times \frac{1}{2} \tan b + \frac{1}{2} \tan\left(\frac{\pi}{4} - 2b\right)\right) = \tan\left(\frac{\pi}{4} - 2b\right) + 2 \tan b$$

마찬가지로 $\pi_3(b) = 4B(b)$ 이고 이 오각형은 부채꼴을 포함하고 있으므로 오각형의 넓이가 최소가 되는 경우 π_3 가 π 에 가장 가깝게 된다.

$$\begin{aligned} B'(b) &= \sec^2\left(\frac{\pi}{4} - 2b\right)(-2) + 2\sec^2 b = -2\sec^2\left(\frac{\pi}{4} - 2b\right) + 2\sec^2 b \\ &= 2\left(\sec b - \sec\left(\frac{\pi}{4} - 2b\right)\right)\left(\sec b + \sec\left(\frac{\pi}{4} - 2b\right)\right) \end{aligned}$$

따라서 $b = \frac{\pi}{4} - 2b$, 즉 $b = \frac{\pi}{12}$ 일때 극값을 갖는다.

$0 < b < \frac{\pi}{12}$ 에서 $B'(b) < 0$ 이고, $\frac{\pi}{12} < b < \frac{\pi}{4}$ 에서 $B'(b) > 0$ 이므로 $b = \frac{\pi}{12}$ 에서 최소가 된다.

$$B\left(\frac{\pi}{12}\right) = 3 \tan \frac{\pi}{12} = 3 \sqrt{\frac{1 - \cos \frac{\pi}{6}}{1 + \cos \frac{\pi}{6}}} = 3 \sqrt{\frac{2 - \sqrt{3}}{2 + \sqrt{3}}} = 3(2 - \sqrt{3}) \text{이므로}$$

π 에 가장 가까운 π_3 는 $12(2 - \sqrt{3}) \approx 12(2 - 1.73) = 3.24$ 이다.

따라서 π_3 가 $\pi_2 = 3$ 보다 π 에 더 가깝게 된다.

2017학년도 모의논술고사 예시답안 (자연계)

물리

[문제 II-1]

경찰차가 움직이기 시작한 시점을 $t=0\text{s}$ 로 두면,

$t=0\text{s}$ 에서 오토바이의 처음 위치는 경찰차와 50m 떨어져 있다. 따라서 $x_{0,\text{오토바이}} = 50\text{m}$ 이다.

오토바이는 등속도로 움직인다.

$$x_{\text{오토바이}} = x_{0,\text{오토바이}} + v_{0,\text{오토바이}}t \quad (1)$$

경찰차는 등가속도 직선 운동을 한다.

$$\begin{aligned} x_{\text{경찰차}} &= x_{0,\text{경찰차}} + v_{0,\text{경찰차}}t + \frac{1}{2}a_{\text{경찰차}}t^2 \quad (2) \\ &= 0 + (0)t + \frac{1}{2}a_{\text{경찰차}}t^2 = \frac{1}{2}a_{\text{경찰차}}t^2 \end{aligned}$$

식(1)과 식(2)로부터 오토바이와 경찰차의 위치를 같게 놓는다.

$$\frac{1}{2}a_{\text{경찰차}}t^2 - v_{0,\text{오토바이}}t - x_{0,\text{오토바이}} = 0 \quad (3)$$

$a_{\text{경찰차}} = 5.0\text{m/s}^2$, $v_{0,\text{오토바이}} = 50\text{m/s}$, $x_{0,\text{오토바이}} = 50\text{m}$ 를 식(3)에 대입하여 t 에 대한 양의 해를 구한다.

$$\therefore t = \frac{50\text{m/s}}{5.0\text{m/s}^2} + \sqrt{\frac{(50\text{m/s})^2}{(5.0\text{m/s}^2)^2} + \frac{2(50\text{m})}{(5.0\text{m/s}^2)}} = 10\text{s} + \sqrt{120}\text{s} = 21\text{s(초)}\text{이다.}$$

[문제 II-2]

수평 방향 처음 속도 성분 $v_{0x} = v_0 \cos 60^\circ = 20 \times \frac{1}{2} = 10\text{m/s}$ 이다.

연직 방향 처음 속도 성분 $v_{0y} = v_0 \sin 60^\circ = 20 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 17\text{m/s}$ 이다.

3초 후의 야구공의 수평 방향과 연직 방향의 속도 성분은 각각 다음과 같다.

$$\begin{aligned} v_x &= v_{0x} = 10\text{m/s}, \\ v_y &= v_{0y} - gt = 17 - 10 \times 3 = -13\text{m/s} \end{aligned}$$

\therefore 3초 후의 야구공의 속력은 $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{10^2 + 13^2} = \sqrt{269}\text{m/s} (\approx 16\text{m/s})$ 이다.

지면 도달 시간은 $\frac{2v_{0x}}{g} = \frac{34}{10} = 3.4\text{s}$ 이다.

\therefore 수평 도달 거리 $R = v_{0x} \times 3.4 = 10 \times 3.4 = 34\text{m}$ 이다.

[문제 II-3]

두 음이온이 양이온에 작용하는 인력은 각각 $F_1 = F_2 = k \frac{Q^2}{r^2}$ 이다.

따라서 두 음이온에 의한 힘 F_1 와 F_2 의 합력은 $\sqrt{2} \times k \frac{Q^2}{r^2}$ 이고,

다른 양이온에 의한 척력 $F_3 = k \frac{Q^2}{(\sqrt{2}r)^2}$ 과 방향이 반대이므로

세 이온으로부터 받는 힘의 총 합력은

$$\sqrt{2} \times k \frac{Q^2}{r^2} - k \frac{Q^2}{(\sqrt{2}r)^2} = (\sqrt{2} - \frac{1}{2}) \times k \frac{Q^2}{r^2} = (1.4 - 0.5) \times 9 \times 10^9 \times \frac{(1.6 \times 10^{-19})^2}{(0.8 \times 10^{-9})^2} = 3.2 \times 10^{-10} \text{N}$$

이다.

[문제 II-4]

양이온 하나를 다른 세 개의 이온들로부터 무한히 떨어진 지점까지 이동시키는데 필요한 일은 양이온이 이온들로부터 무한히 떨어진 원점에 있을 때와 이온들이 정사각형으로 배치되어 있을 때의 전기력에 의한 퍼텐셜 에너지 차이와 같다. 따라서

$$\begin{aligned} W = \Delta U &= U_{(\text{무한히 떨어진 원점})} - U_{(\text{정사각형의 이온배치})} \\ &= 0 - (k \frac{Q \times (-Q)}{r} + k \frac{Q \times (-Q)}{r} + k \frac{Q \times Q}{\sqrt{2} \times r}) = (2 - \frac{1}{\sqrt{2}}) \times k \frac{Q^2}{r} \\ &= (2 - 0.7) \times 9 \times 10^9 \times \frac{(1.6 \times 10^{-19})^2}{0.8 \times 10^{-9}} = 3.7 \times 10^{-19} \text{J} \end{aligned}$$

이다.

2017학년도 모의논술고사 예시답안 (자연계)

화학

[문제 II-1]

제시문 (다), (라)로부터 1몰의 결합에너지

436 kJ/mol = 436,000 J/mol 이다.

1몰의 결합을 끊기 위해 필요한 에너지가 436,000 J이므로

개당 필요한 에너지는

$$436,000 \text{ J} / 6.02 \times 10^{23} = 7.24 \times 10^{-19} \text{ J이다. (4점)}$$

(2점)

$$E = hc/\lambda = 6.6 \times 10^{-34} \text{ Js} \times 3 \times 10^8 \text{ m/s} / \lambda$$

$$\lambda = 6.6 \times 10^{-34} \text{ Js} \times 3 \times 10^8 \text{ m/s} \times 7.24 \times 10^{-19} \text{ J} = 2.73 \times 10^{-7} \text{ m (4점)}$$

$$= 273 \text{ nm}$$

[문제 II-2]

제시문 (나)로부터 수소 원자의 선 스펙트럼 중 발머 계열의 스펙트럼은 들뜬 상태에서 $n = 2$ 로 떨어지면서 방출되는 빛임.

$$E_n = -1,312/n^2 \text{ kJ/mol이므로}$$

$n = 3 \rightarrow n = 2$ 전자 전이의 경우 방출되는 에너지는

$$(1) E_{3 \rightarrow 2} = - (1,312/9 - 1,312/4) = 182.2 \text{ kJ/mol}$$

$$182.2 \text{ kJ/mol} = 182,200 \text{ J/mol} = hc/\lambda = 6.6 \times 10^{-34} \text{ Js} \times 3 \times 10^8 \text{ m/s} \times 6.02 \times 10^{23} / \lambda$$

$$\lambda = 6.6 \times 10^{-34} \text{ Js} \times 3 \times 10^8 \text{ m/s} \times 6.02 \times 10^{23} / 182,200 \text{ J/mol} = 6.54 \times 10^{-7} \text{ m}$$

$$= 654 \text{ nm (4점)}$$

(2) $n = 8 \rightarrow n = 2$ 전이에 대한 파장 계산하면

$$E_{8 \rightarrow 2} = - (1,312/64 - 1,312/4) = 308 \text{ kJ/mol}$$

$$308 \text{ kJ/mol} = 308,000 \text{ J/mol} = hc/\lambda = 6.6 \times 10^{-34} \text{ Js} \times 3 \times 10^8 \text{ m/s} \times 6.02 \times 10^{23} / \lambda$$

$$\lambda = 6.6 \times 10^{-34} \text{ Js} \times 3 \times 10^8 \text{ m/s} \times 6.02 \times 10^{23} / 308,000 \text{ J/mol} = 3.87 \times 10^{-7} \text{ m}$$

$$= 387 \text{ nm (4점)}$$

즉, $n = 3, 4, 5, 6, 7, 8$ 에서 $n=2$ 로 방출되는 모든 빛은 가시광선 영역에 존재함. (2점)

[문제 II-3]

제시문 (마)로부터 일반적인 $^{14}_6\text{C}/^{12}_6\text{C}$ 의 비는 약 1×10^{-12} 이나 발견된 화석의 $^{14}_6\text{C}/^{12}_6\text{C}$ 의 비는 약 3.13×10^{-14} 이다.

즉, 대부분의 $^{14}_6\text{C}$ 가 방사능 붕괴 과정을 거치고 3.13%의 $^{14}_6\text{C}$ 가 존재함.

50% - 25% - 12.5% - 6.25% - 3.125%

$[\frac{14}{6}C/\frac{12}{6}C]$ 의 비가 3.13×10^{-14} 이 되려면 반감기가 5번 지남

제시문 (바)로부터 방사성 탄소의 반감기는 5,730년이므로

$$5,730 \times 5 = 28,650 \text{ 년}$$

즉, 발견된 화석은 약 28,650 년 전에 죽은 매머드임.

[문제 II-4]

- 방사능 붕괴된 라듐 원자 수

$$\begin{aligned} &: 3.42 \times 10^{10} \text{ g}^{-1}\text{s}^{-1} \times 0.2\text{g} \times 80\text{일} \times 24\text{시간/일} \times 60\text{분/시간} \times 60\text{초/분} \\ &= 4.73 \times 10^{16} \text{ 개} \quad (2\text{점}) \end{aligned}$$

- 제시문 (바)로부터 발생한 헬륨 기체 수는 알파 입자 수와 동일함
따라서 발생한 헬륨 기체 수

$$: 4 \times 4.73 \times 10^{16} = \underline{1.89 \times 10^{17} \text{ 개}} \quad (3\text{점})$$

- 포집된 헬륨 기체 부피로부터 몰 수를 구하면

제시문 (아)로부터 22.4 L에 1 mole의 기체가 존재하므로

$$7 \times 10^{-6} / 22.4 = \underline{3.125 \times 10^{-7} \text{ mole}} \quad (7 \text{ mm}^3 = 7 \times 10^{-6} \text{ L}) \quad (3\text{점})$$

따라서

$$\text{아보가드로 수} = 1.89 \times 10^{17} / 3.125 \times 10^{-7} = \underline{6.05 \times 10^{23}} \quad (2\text{점})$$

2017학년도 모의논술고사 예시답안 (자연계)

생명과학

[문제 II-1]

연소는 효소의 촉매 작용 없이 공기 중에서 에너지를 열 에너지로 방출하는 것으로 매우 빠른 반응을 보인다. 에너지의 저장이 없으며, 예시와 같이 대략 686Kcal/1 포도당의 에너지를 방출할 수 있다. 세포 호흡의 경우, 약 38ATP를 생산 할 수 있으므로 $\frac{38 \times 7.3}{686} \times 100 \approx 40\%$ 의 효율을

보이지만, 발효의 경우는 $\frac{2 \times 7.3}{686} \times 100 \approx 2\%$ 의 효율을 보인다.

세포가 세포 호흡을 하는 이유는 많은 양의 에너지가 한꺼번에 발생할 경우 세포는 이를 이용할 수 없다. 하지만, 이를 세포가 에너지원으로 이용 할 수 있는 ATP의 형태의 화학 에너지로 변환하여 필요한 곳에서 원하는 만큼 사용이 가능 하도록 할 수 있기 때문에 효율이 40% 밖에 되지 않음에도 불구하고 세포 호흡을 하게 된다. 세포가 발효를 하는 이유는 같은 양의 포도당을 소모하지만 발효는 약 세포 호흡에 비하여 약 5%의 에너지 밖에 생성하지 못함에도 불구하고 산소가 없는 상황에서도 에너지를 필요로 하기 때문에 발효를 하게 된다.

	발효	세포 호흡
조건	산소가 없음	산소가 있음
장소	세포질	세포질과 미토콘드리아
기질의 분해 정도	불완전 분해되어 중간 산물이 남는다.	물과 이산화탄소로 완전 분해
전자의 최종 수용체	알코올 발효 : 아세트알데하이드 젖산 발효 : 피루브산	산소

[문제 II-2]

인슐린이 부족하거나 없게 되면 세포들은 세포내로 포도당을 흡수하지 못하거나 흡수되는 양이 많이 줄어들게 된다. 세포들은 다양한 기능을 수행하며 각 각의 역할을 수행하고 그 결과 생명 현상이 이루어지게 된다. 그 것을 유지하기 위해 에너지를 필요로 하고 따라서 음식을 섭취하게 된다. 당뇨병 환자의 경우 음식을 충분히 섭취하여 혈액에 많은 양의 에너지를 가지고 있다고 하여도 인슐린의 양이 부족하거나 없기 때문에 세포가 이를 흡수 하여 이용할 수 없게 된다. 따라서 혈당 수치는 증가 하게 된다. 세포가 포도당을 흡수하지 못하기 때문에 뇌는 음식을 더 섭취하도록 신호를 보내고 지방과 근육 단백질을 분해해 에너지를 얻으려고 한다. 당뇨병 환자의 경우 세포는 사용할 수 있는 에너지원이 적게 되기 때문에 지방과 근육 단백질의 감소와 에너지가 적어 복제력 등이 줄게 되어 결국 체중의 감소가 일어나게 된다. 많은 양의 당이 소변으로 배출 되게 된다. 많은 양의 당을 녹이기 위해 물이 많이 배출되어 소변량이 많아지고 갈증을 느끼게 된다.

[문제 II-3]

제 1형 당뇨병 환자의 경우 이자의 b-세포가 파괴되어 인슐린이 분비 되지 않는 상태로 음식을 섭취하여도 혈액내의 당을 흡수하지 못하게 된다. 따라서 혈당량이 정상인에 비하여 더 높게 되고 그 수치가 정상인 보다 길게 유지 된다. 하지만, 인슐린을 투여 하게 되면 세포가 당을 흡수할 수 있게 되어 투여 후 혈당량은 정상인과 비슷하게 감소하게 된다.

[문제 II-4]

제 1형 당뇨병은 이자의 b-세포가 파괴되어 인슐린이 분비 되지 않는 상태로 인슐린을 합성할 수 있는 세포가 존재 하지 않는다. 따라서 이러한 경우 유전자 치료를 하기 보다는 줄기 세포 치료를 하는 것이 바람직하다. 제2 형 당뇨병은 인슐린 저항성으로 인슐린 합성은 되지만 이를 수용하는 수용체 단백질들에 문제가 발생해 이를 인식 하지 못하는 경우이다. 이는 유전자 치료도 가능하며 줄기 세포 치료가 현재 활발히 연구 되어 지고 있다. 돌연변이에 의해 b-세포가 제대로 기능을 하지 못해 인슐린이 분비 되지 못하는 경우와 인슐린 자체 또는 이를 인식하는 수용체에 변형이 와서 당뇨가 발생하는 경우는 유전자에 변형이 온 경우로 유전이 가능하다. 정상 유전자를 발현 시키게 되면 치유가 가능하기 때문에 유전자 치료와 줄기 세포 치료 모두 현재 연구가 되어 지고 있다.