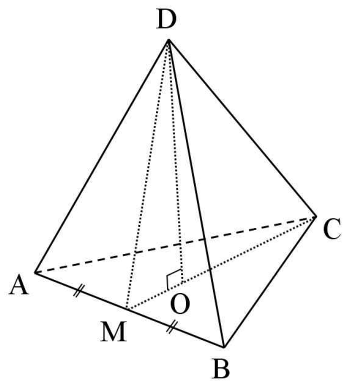
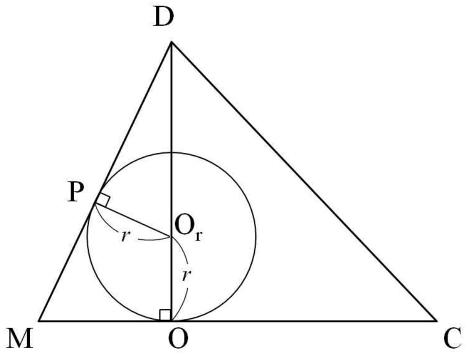
예 시 답 안 (의학계)

<논제 I> 수학

[논제 I-1]

변 AB의 중점을 M이라고 하고, 정삼각형 ABC의 무게중심을 O라고 하면 다음의 왼쪽 그림과 같고, 주어진 사면체에 내접하는 구의 중심은 사면체의 세 옆면과 동일한 거리에 있기 때문에, 선분 OD 위에 있음을 알 수 있다. 이 때, 내접하는 구의 반지름을 r이라고 하고 그 중심을 O_r이라 할 때, 삼각형 DMC를 지나는 평면으로 잘라 단면을 보면 다음의 오른쪽 그림과 같다. 여기에서 점 P는 그 구가 삼각형 DAB를 지나는 평면에 접하는 점이다.





변 DA의 길이가 a이고 각 $\angle ADM$이 θ이므로, 변 DM의 길이는 $a\cos\theta$이고, 변 AB의 길이는 $2a\sin\theta$이다. (이때, 사면체를 이루는 θ의 범위는 $0<\theta<\frac{\pi}{3}$이다.) 삼각형 ABC는 정삼각형이므로, 선분 CM의 길이는 $\sqrt{3}\,a\sin\theta$이고, O가 정삼각형 ABC의 무게중심이므로, 선분 OM의 길이는 $\frac{a\sin\theta}{\sqrt{3}}$ 이다. 따라서, 선분 OD의 길이는

$$\sqrt{a^2\cos^2\theta-\frac{a^2\sin^2\theta}{3}}=a\sqrt{\frac{3-4\sin^2\theta}{3}}=a\sqrt{\frac{3\sin\theta-4\sin^3\theta}{3\sin\theta}}=a\sqrt{\frac{\sin3\theta}{3\sin\theta}}$$

이 된다. 삼각형 DPO_r과 삼각형 DOM은 닮은 직각삼각형이므로, 내접하는 구의 반지름 r은

$$\frac{a\sqrt{\sin\theta\,\sin3\theta}}{\sqrt{3}\,\sin\theta+3\cos\theta}\quad \left(\text{혹은 } \frac{a\sqrt{\sin\theta\,\sin3\theta}}{2\sqrt{3}\,\sin\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)},\ \frac{a\sin\theta\sqrt{3-4\sin^2\theta}}{\sqrt{3}\,\sin\theta+3\cos\theta},\ \frac{a\sin\theta\sqrt{4\cos^2\theta-1}}{\sqrt{3}\,\sin\theta+3\cos\theta}\right)$$

이 된다.

[논제 I-2]

변 AB의 길이가 $2a\sin\theta$이므로, 주어진 부등식을 증명하기 위해서 $\frac{r}{2a\sin\theta}$을 고려한다.

$\frac{r}{2a\sin\theta}=\frac{\sqrt{3-4\sin^2\theta}}{2\sqrt{3}\,\sin\theta+6\cos\theta}$ 이므로, $\frac{r}{2a\sin\theta}$을 θ에 대하여 미분하면 다음과 같다.

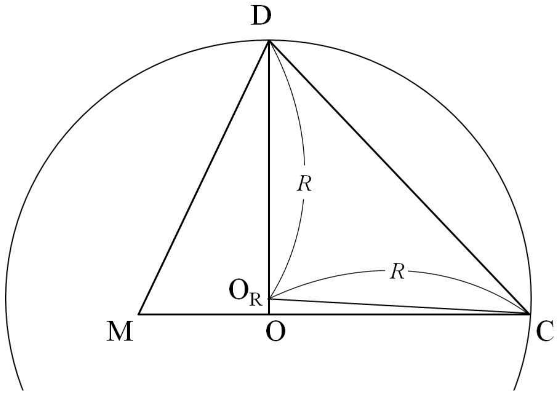
$$\frac{\frac{-4\sin\theta\cos\theta}{\sqrt{3-4\sin^2\theta}}(2\sqrt{3}\,\sin\theta+6\cos\theta)-\sqrt{3-4\sin^2\theta}\,(2\sqrt{3}\,\cos\theta-6\sin\theta)}{(2\sqrt{3}\,\sin\theta+6\cos\theta)^2}$$

이고 이를 정리하면, $-\frac{\sin\theta+\sqrt{3}\cos\theta}{2\sqrt{3-4\sin^2\theta}\,(2\sqrt{3}\,\sin\theta+6\cos\theta)^2}$ 이다. 이 값은, $0<\theta<\frac{\pi}{3}$에 대하여

항상 음수이므로, θ가 증가하면 $\dfrac{r}{2a\sin\theta}$은 감소함을 알 수 있다. 따라서, $\dfrac{r}{2a\sin\theta}$의 값은 $\lim_{\theta\to 0}\dfrac{r}{2a\sin\theta}$보다 작으므로, $\dfrac{r}{2a\sin\theta}=\dfrac{\sqrt{3-4\sin^2\theta}}{2\sqrt{3}\sin\theta+6\cos\theta}<\lim_{\theta\to 0}\dfrac{r}{2a\sin\theta}=\dfrac{1}{2\sqrt{3}}$이다. 그러므로, 주어진 부등식이 성립한다.

[논제 I-3]

주어진 사면체에 외접하는 구의 중심도, 점 A, 점 B, 점 C와 동일한 거리에 있기 때문에, 내접하는 구와 마찬가지로 선분 OD 위에 있음을 알 수 있다. 이 때, 외접하는 구의 반지름을 R이라고 하고 그 중심을 O_R이라 할 때, 삼각형 DMC를 지나는 평면으로 잘라 단면을 보면 다음의 그림과 같다.



그러면 **논제I-(1)**에서와 같은 이유로 선분 OC의 길이는 $\dfrac{2a\sin\theta}{\sqrt{3}}$이고, 선분 OO_R은 $a\sqrt{\dfrac{3-4\sin^2\theta}{3}}-R$ 이 된다. 삼각형 OCO_R도 직각삼각형이므로, 피타고라스 정리에 의하여, $\left(a\sqrt{\dfrac{3-4\sin^2\theta}{3}}-R\right)^2+\dfrac{4a^2\sin^2\theta}{3}=R^2$이 성립한다. 따라서, 외접하는 구의 반지름 R은

$$\frac{\sqrt{3}a}{2\sqrt{3-4\sin^2\theta}}\ \left(\text{혹은 } \frac{a\sqrt{3\sin\theta}}{2\sqrt{\sin 3\theta}},\ \frac{\sqrt{3}a}{2\sqrt{4\cos^2\theta-1}}\right)$$

이 된다.

[논제 I-4]

[논제 I-2]와 같은 방법으로 $\dfrac{r}{R}$의 최댓값을 고려한다. $\dfrac{r}{R}=\dfrac{2\sin 3\theta}{3\sin\theta+3\sqrt{3}\cos\theta}$이고 $\sin\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{1}{2}$이므로, $\dfrac{r}{R}=\dfrac{\sin 3\theta}{3\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{3}\right)}$이 된다. 여기에서, $\theta+\dfrac{\pi}{3}$을 t로 치환하자. 즉, $t=\theta+\dfrac{\pi}{3}$이라 하자. 그러면, t의 범위는 $\dfrac{\pi}{3}\le t\le\dfrac{2\pi}{3}$이고,

$$\frac{r}{R}=\frac{\sin(3t-\pi)}{3\sin t}=-\frac{\sin 3t}{3\sin t}=\frac{4\sin^3 t-3\sin t}{3\sin t}=\frac{4\sin^2 t}{3}-1$$

가 된다. 따라서, $\dfrac{r}{R}$는 범위 $\dfrac{\pi}{3}\le t\le\dfrac{2\pi}{3}$에서 $t=\dfrac{\pi}{2}$일 때 최대가 됨을 사인함수의 성질로부터 쉽게 알 수 있다. 즉, $\dfrac{r}{R}=\dfrac{4\sin^2 t}{3}-1\le\dfrac{4\sin^2\dfrac{\pi}{2}}{3}-1=\dfrac{1}{3}$이므로, 논제에 주어진 부등식이 성립한다. 이 때 등식이 성립하는 경우는, $t=\dfrac{\pi}{2}$인 경우이므로 그 때 $\theta=\dfrac{\pi}{6}$이다, 이 경우는 정사면체이다.

<논제 Ⅱ> 물리

[논제 Ⅱ-1]

공기의 밀도가 약 $1.3\,\mathrm{kg/m^3}$이므로 $1\,\mathrm{m^3}$안의 공기의 질량은 $1.3\,\mathrm{kg}$이다. 질량 m인 물체가 속력 v로 움직일 때 운동에너지는 $\frac{1}{2}mv^2$이므로 바람의 속력이 $10\,\mathrm{m/s}$일 때 $1\,\mathrm{m^3}$안에 들어 있는 공기는 바람이 불지 않을 때에 비해 $\frac{1}{2}\times 1.3\,\mathrm{kg}\times(10\,\mathrm{m/s})^2 = 65\,\mathrm{J}$ 만큼의 운동 에너지를 더 갖는다.

[논제 Ⅱ-2]

단위 시간 동안 풍력 발전기로 부는 바람의 총 부피는 단면적과 속력의 곱인 $\pi\times(10\,\mathrm{m})^2\times(10\,\mathrm{m/s})\simeq 3000\,\mathrm{m^3/s}$ 이다. $10\,\mathrm{m/s}$로 부는 바람의 $1\,\mathrm{m^3}$안에 들어 있는 공기는 바람이 불지 않을 때에 비해 $65\,\mathrm{J}$의 운동에너지를 더 가지므로 전기에너지로 변할 수 있는 에너지의 최댓값은 초 당 약 $3{,}000\,\mathrm{m^3}\times 65\mathrm{J/m^3}\simeq 200{,}000\,\mathrm{J}$이다. 따라서 이 발전기가 출력하는 전력은 최대 약 $200{,}000\,\mathrm{W}\ (=200\,\mathrm{kW})$정도이다.

* 풍력발전기를 지난 후에 바람의 속력이 완전히 멈출 수 있는 것도 아니고 전환 효율도 고려되어야 하므로 실제의 전력은 위의 계산한 양보다 적다. 그러한 사항들을 고려하여 어림한 경우에도 정답이고, 그러한 추가사항을 고려하지 않은 경우에도 감점하지 않는다.

[논제 Ⅱ-3]

많은 양의 전기에너지를 생산하기 위해서는 여러 개의 발전 탑을 세워야 하므로 넓은 장소가 필요하고 초기 설비투자 비용이 크다. 또한 지리적 지형적인 제약 요건에 의해 발전소의 위치에 제약이 있다. 하지만, 자연의 바람을 이용하기 때문에 에너지 구입비용이 들지 않고 연소 과정이 없으므로 공기를 오염시키지 않는 장점이 있다.

* 위에 제시된 것 이외에도 풍력발전의 장단점을 타당하게 논리적으로 설명한 경우 정답이다.

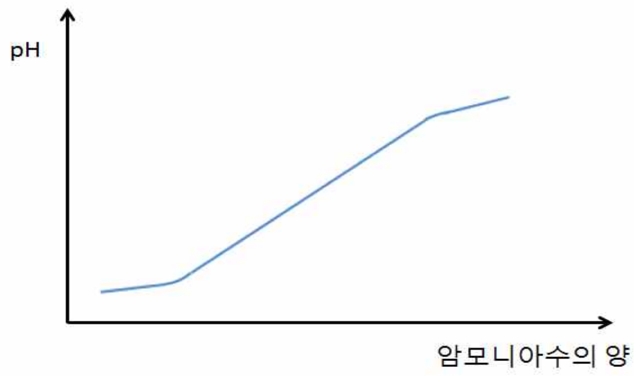
[논제 Ⅱ-4]

바람이 불지 않는 경우에도 공기 안의 분자들은 운동을 하고 그 운동에너지는 온도에 비례한다. 그러나 이 경우 기체 분자의 운동은 매우 무질서하다. 외부와의 상호작용이 없는 계에서는 무질서도(엔트로피)가 증가하는 쪽으로만 변화가 일어나며 그 반대쪽으로는 변화가 일어날 수 없다. 이처럼 열 또는 에너지의 이동에 방향성이 있음을 나타내는 법칙을 열역학 제 2 법칙이라고 한다. 이에 따라 균일한 온도를 가지는 기체의 내부에너지를 일이나 전기 에너지로 변환시킬 수는 없다.

<논제 Ⅱ> 화학

[논제 II-1]

(1) 강산이나 강염기가 포함된 중화반응의 적정곡선은 급격한 pH의 변화를 보이는 구간이 관찰되나 약산과 약염기의 적정 반응은 아래의 그림과 같이 완만한 기울기를 갖는 적정곡선을 보인다.



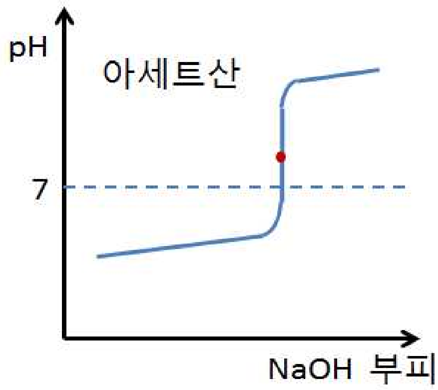
(2) 약산과 약염기의 중화반응은 반응이 한쪽으로 치우치지 않기 때문에 pH의 변화가 완만하게 일어나 중화점을 찾기가 쉽지 않아 식초에 포함된 아세트산의 정확한 농도를 알아내기가 어렵다.

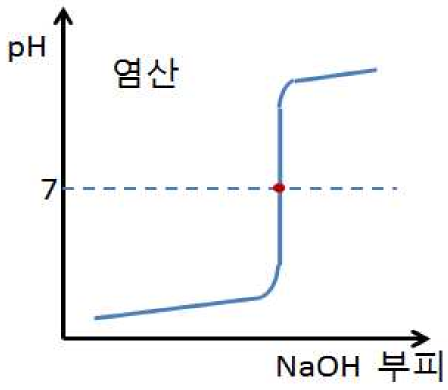
(3) 식초에 암모니아수를 과량을 넣은 후 황산으로 혼합액을 적정하면 아세트산과 모두 반응하고 남은 과량의 암모니아가 황산과 반응한다. 이 방법을 통하면 강산으로 약염기를 적정하게 되어 중화점을 찾기가 훨씬 용이해진다는 장점이 있다. 그러나, 약산인 아세트산의 짝염기인 아세테이트 이온도 가해지는 황산과 반응을 하기 때문에 이 방법을 통해서도 정확한 아세트산의 양을 알아내기는 어렵다.

[논제 II-2]

(1) nMV = n'M'V'의 식에서 아세트산과 NaOH의 가수(n, n')는 모두 1이다.
아세트산의 농도(M)은 0.05 M이고 아세트산의 부피(V)는 100 mL(0.1 L), NaOH 수용액의 농도(M')는 0.2 M이고 가해진 NaOH의 부피(V')를 x mL ($x \times 10^{-3}$ L)로 놓고 MV = M'V'의 식을 이용하면
0.05 M X 0.1 L = 0.2 M X x L가 된다.
이 식을 정리하면, 필요한 NaOH 수용액의 부피는 25 mL가 된다.
염산은 아세트산과 달리 강산이나 아세트산과 마찬가지로 양성자 하나만을 내어놓을 수 있다. 염산 수용액의 농도가 아세트산의 농도와 같으므로 염산의 적정을 위해 필요한 NaOH 수용액의 부피는 25 mL가 된다.

(2)





염산과 같은 강산과 NaOH와 같은 강염기가 중화 반응을 하는 경우에는 산과 염기가 당량비로 반응하여 중화점이 pH 7 근처에서 관찰되나, 아세트산과 같은 약산이 강염기인 NaOH와 중화 반응을 하는 경우에는 산과 염기가 당량비로 반응후 생성된 아세테이트 이온이 아래와 같이 다시 물과 반응하여 염기성 용액이 되기 때문에 중화점은 pH 7 이상에서 관찰된다.

$$CH_3COO^-(aq) + H_2O(l) \leftrightarrows CH_3COOH(aq) + OH^-(aq)$$

(3) 약산인 아세트산을 강염기인 NaOH로 적정하는 경우에는 중화점이 pH 7 이상이기 때문에, pH가 급격하게 변하는 구간에 변색 범위가 존재하는 페놀프탈레인만이 지시약으로 사용가능하다.
강산인 염산을 강염기인 NaOH로 적정하는 경우에는 중화점이 pH 7 근처이며, pH가 급격하게 변하는 구간이 pH 2~10 이상으로 매우 넓어 메틸 레드, 브로모티몰 블루, 페놀프탈레인 모두 변색 범위가 이 구간 안에 포함되므로 세가지 지시약을 모두 사용할 수 있다.

<논제 Ⅱ> 생명 과학

[논제 Ⅱ-1]

성홍열이 휩쓸고 있는 상황에서도 열병에 걸린 젊은 여자가 격리 조치 없이 10명의 가족들과 한 방에서 자고, 13명의 아이들이 한 방에서 함께 생활한 모습으로 볼 때 당시 버킹검셔 마을의 보건의학적 여건은 매우 열악했을 것으로 추정된다. 한편, 자매 3명이 모두 사생아를 둔 상황으로 볼 때 성문화도 보건의학적으로 불량하였을 것으로 추정된다. 감염성 질환의 의심 증세가 있을 때는 집안에서 최대한 가족들과 떨어져 지내고, 식기, 수건, 침구, 변기 등을 공유하지 않도록 한다. 또 손을 자주 비누로 씻고 흐르는 물로 헹구며, 기침이나 재채기를 할 때는 휴지나 옷소매로 가리고 하고, 다른 사람과 같은 공간에 있을 때는 마스크나 가리개를 하여 전염을 최대한 방지한다. 또 환기를 자주 시키고, 문고리 등 접촉이 빈번한 물건은 소독을 하거나 자주 닦아주며 환자가 사용한 물품은 밀봉하거나 소독한다.

[논제 Ⅱ-2]

병원체의 감염성은 숙주에 침투해서 병원체의 숫자를 증식시킬 수 있는 능력에 달려 있다. 실험 결과에서 핵산 분해 효소나 아연 이온을 처리해도 병원체의 감염성이 그대로 유지된다는 사실은 그 병원체의 생존과 증식에 DNA나 RNA와 같은 핵산이 필요하지 않다는 것을 의미한다. 반면, 단백질 분해 효소나 페놀 처리로 단백질을 분해하거나 변성시킨 경우에는 병원체의 감염성이 사라지므로, 단백질 성분이 그 병원체의 감염성을 유지하는 핵심 물질임을 의미한다. 이러한 두 가지 조건을 만족시키는 병원체는 제시문 [마]의 프라이온뿐이다.

[논제 Ⅱ-3]

의심 환자로부터 가래 등의 호흡 분비물을 채취하여 RNA를 추출한다. 역전사 효소를 이용하여 RNA로부터 DNA를 합성한다. 메르스 코로나바이러스에만 있는 특이적 염기 서열에 상보적으로 결합하는 프라이머를 합성하여 중합 효소 연쇄 반응(PCR)을 통해 DNA를 증폭시킨다. 검침 부위가 충분히 증폭되었는지 확인하여 메르스 여부를 확진한다.

[논제 Ⅱ-4]

(1) N명의 피실험자를 모집하여 실험 방법과 주의 사항에 대해 충분히 설명한 다음, 무작위로 세 실험군에 배정한다. (2) 피실험자 사이의 변이를 최소화하기 위해, 우선 피실험자들의 손을 깨끗하게 충분히 씻도록 한 다음, 적당한 숫자의 세균이 포함되도록 세균을 알맞게 희석시킨 물에 손을 담갔다가 꺼내서 말리도록 한다. (3) 피험자 한쪽 손의 특정 부위에서 세균을 채집해서 배양한 다음 배양된 세균 콜로니(군체)의 숫자를 헤아려 세균의 수를 기록한다(사용 전 세균 수). (4) 배정된 제품의 손 세정제를 사용하여 손을 씻도록 한 다음, 다른 한쪽 손의 같은 특정 부위에서 세균을 채집하고 배양해서 세균의 수를 기록한다(사용 후 세균 수). (5) 각 실험군 별로 실험결과를 평균과 표준편차로 기록한 다음, 사용 전과 사용 후의 세균 수 변화를 %로 환산하여 기록한다. (6) 각 제품 사이의 항균 능력의 차이를 알맞은 통계적 방법으로 분석한다.