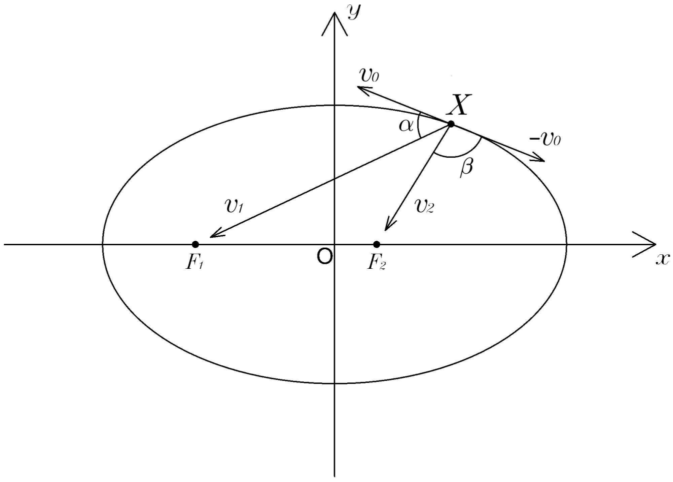
2013학년도 수시 2차 논술고사 예시답안

자연계 논술 (일) 오전

<논제 I-1>

(1) 타원의 초점이 $F_1=(-1,0), F_2=(1,0)$ 이고, 타원 위의 한 점이 $B=(0,1)$ 이므로 장축의 길이는 타원의 성질에 의해 $2a=d(F_1,B)+d(F_2,B)$ 이며, a= $\sqrt{2}$ 이다. 그리고 단축의 길이는



그림에서 $b=1$이다. 따라서 타원방정식은 $\frac{x^2}{2}+y^2=1$ 이 된다.

타원 위의 임의의 점 $X=(x_0,y_0)$에서 접선의 기울기는 타원방정식을 x에 관해 미분을 하여 $x+2y\frac{dy}{dx}=0$을 얻고, 이 식에 점 $X=(x_0,y_0)$를 대입하여 구하면 $m_0=-\frac{x_0}{2y_0}$ **이다.**

α는 직선 l_0와 선분 XF_1의 사잇각이므로 (기울기를 이용하여 v_0를 결정)

$v_0=(-2y_0,x_0)$, $v_1=(-1-x_0,-y_0)$ 두 벡터의 사잇각이 되고, α가 예각이므로 $\cos\alpha=\frac{|v_0 \cdot v_1|}{\|v_0\|\|v_1\|}$이다. $\frac{x_0^2}{2}+y_0^2=1$ 이므로 대입하여 정리하면 $\cos\alpha=\frac{|y_0|}{\sqrt{1+y_0^2}}$ **이다.**

(계산과정은 아래 참조)

$$\left(\cos\alpha=\frac{|v_0 \cdot v_1|}{\|v_0\|\|v_1\|}=\frac{|2y_0+2x_0y_0-x_0y_0|}{\sqrt{4y_0^2+x_0^2}\sqrt{(1+x_0)^2+y_0^2}}=\frac{|y_0(x_0+2)|}{\sqrt{2y_0^2+2}\sqrt{\frac{x_0^2}{2}+2x_0+2}}=\frac{|y_0(x_0+2)|}{\sqrt{y_0^2+1}\,|x_0+2|}\right)$$

(2) (1)에서와 동일한 방법으로 각 β는 직선 l_0와 선분 XF_2의 사잇각이므로, 각 β는

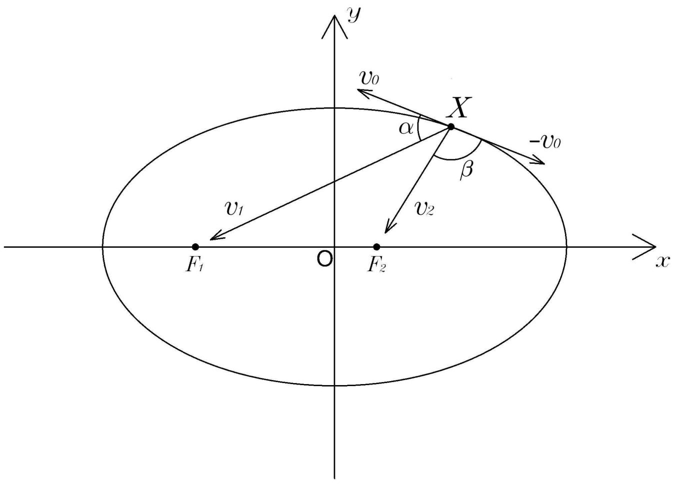
두 벡터 $-v_0=-(-2y_0,x_0)$, $v_2=(1-x_0,-y_0)$의 사잇각이 된다. 따라서, $\cos\beta=\frac{|v_0 \cdot v_2|}{\|v_0\|\|v_2\|}$이고,

$\frac{x_0^2}{2}+y_0^2=1$이므로 대입하여 정리하면 $\cos\beta=\frac{|y_0|}{\sqrt{1+y_0^2}}$.

(1)의 결과와 $\cos\beta$의 결과로부터 $\cos\alpha=\cos\beta$임을 보일 수 있고 $\cos x$는 $x\in[0\frac{\pi}{2}]$에서 일대일 함수이므로 $\alpha=\beta$ 이다.

<논제 I-1> (별해)

(1) 타원의 초점이 $F_1=(-1,0), F_2=(1,0)$ 이고, 타원 위의 한 점이 $B=(0,1)$ 이므로



장축의 길이는 타원의 성질에 의해 $2a=d(F_1,B)+d(F_2,B)$ 이며, $a=\sqrt{2}$ 이다. 그리고 단축의 길이는 그림에서 $b=1$이다. 따라서 타원방정식은 $\frac{x^2}{2}+y^2=1$ 이 된다.

타원 위의 임의의 점 $X=(x_0,y_0)$에서 접선의 기울기는 타원방정식을 x에 관해 미분을 하여 $x+2y\frac{dy}{dx}=0$을 얻고, 이 식에 점 $X=(x_0,y_0)$를 대입하여 구하면

<u>$m_0=-\frac{x_0}{2y_0}$ 이고 접선의 방정식은</u>

<u>$2y_0y+x_0x=2$ 이다.</u>

초점 F_1에서 접선 l_0로의 거리 $d=\frac{|2+x_0|}{\sqrt{4y_0^2+x_0^2}}$ 이다. (이때 거리가 최소가 되는 지점은 l_0와 수직이 된다.)

X와 F_1사이의 거리 $|XF_1|=\sqrt{(x_0+1)^2+y_0^2}$ 이므로,

$\sin\alpha=\frac{d}{|XF_1|}$이고 (직각삼각형의 변임을 이용) 정리를 하면, $\sin\alpha=\frac{1}{\sqrt{1+y_0^2}}$이다.

$\cos\alpha=\sqrt{1-sin^2\alpha}$ 이므로, $\cos\alpha=\frac{|y_0|}{\sqrt{1+y_0^2}}$.

(2) (1)에서와 동일한 방법으로 각 β는 직선 l_0와 초점 F_2와의 거리를 이용하여 구할 수 있다.

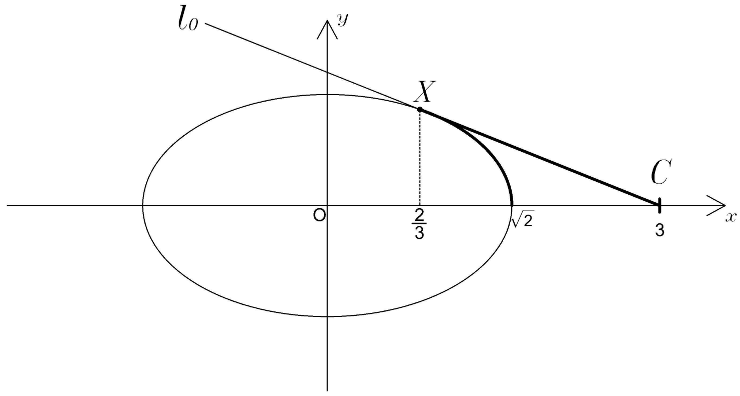
초점 F_2에서F_1 접선 l_0로의 거리 $d=\frac{|2-x_0|}{\sqrt{4y_0^2+x_0^2}}$ 이다.

X와 F_2사이의 거리 $|XF_2|=\sqrt{(x_0-1)^2+y_0^2}$ 이므로, (1)에서와 같이 정리하면,

$\cos\beta=\frac{|y_0|}{\sqrt{1+y_0^2}}$.

<u>(1)의 결과와 $\cos\beta$의 결과로부터 $\cos\alpha=\cos\beta$임을 보일 수 있고 $\cos x$는 $x\in[0\ \frac{\pi}{2}]$에서 일대일 함수이므로 $\alpha=\beta$ 이다.</u>

<논제 I-2>



타원의 방정식은 동일하며, 점 $C=(3,0)$으로 주어졌으므로, 접점 $X=(x_0,y_0)$를 구하기 위해 먼저 접점을 지나는 직선 $y=-\frac{x_0}{2y_0}(x-x_0)+y_0$을 구한다. 이 직선이 $C=(3,0)$을 지나므로 (x_0,y_0)는 $0=-\frac{x_0}{2y_0}(3-x_0)+y_0$을 만족하고, 이 식과 $\frac{x_0^2}{2}+y_0^2=1$을 연립하면 $(x_0,y_0)=(\frac{2}{3},\frac{\sqrt{7}}{3})$이다.

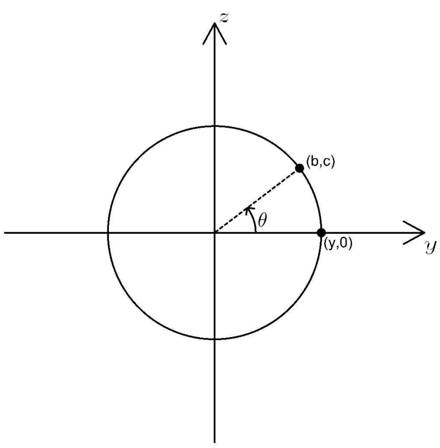
빗금 친 부분을 x축을 중심으로 회전한 회전체의 부피는 점 C와 X를 지나는 직선을 x의 구간 $\left[\frac{2}{3},3\right]$에서 x축을 중심으로 회전한 회전체의 부피 V_1 에서 타원의 일부인 곡선을 회전한 회전체의 부피 V_2를 뺀 것과 같다.

$V_1=\int_{\frac{2}{3}}^{3}\frac{1}{7}(x-3)^2\pi dx=\frac{49}{81}\pi$ **(혹은 반지름이 $\frac{\sqrt{7}}{3}$, 높이가 $\frac{7}{3}$인 원뿔의 부피로 계산)**

$V_2=\int_{\frac{2}{3}}^{\sqrt{2}}y^2\pi dx=\pi\int_{\frac{2}{3}}^{\sqrt{2}}(1-\frac{x^2}{2})dx=\pi(\frac{2}{3}\sqrt{2}-\frac{50}{81})$, $\quad V_1-V_2=\pi\frac{11-6\sqrt{2}}{9}$.

<논제 I-3>

(1)회전체에 내접하면서 부피가 최대가 되는 직육면체의 꼭짓점들 중 (x,y,z) 성분이 모두 양수인 점을(a,b,c)라고 하자. 이 직육면체의 각 면들이 xy, yz, 혹은 zx평면과 평행이므로,



다른 꼭짓점들은 (a,b,c)와 대칭인 위치에 있다.

또한 (a,b,c)는 회전체 위의 점이므로 타원위의 점 $(a,y,0)$을 x축을 중심으로 회전하여 얻게 된다. 즉, $(a,b,c)=(a,\,ycos\theta,\,ysin\theta)$ 이다.

따라서 직육면체의 부피는 $2a2b2c=8ay^2\cos\theta\sin\theta$ **이다.**

이때, **부피가 최대가 되는** θ**는** $\cos\theta\sin\theta=\frac{1}{2}sin2\theta=\frac{1}{2}$**일 때이므로,** $\theta=\frac{\pi}{4}$**이다.**

(별해) 회전체의 부피는 $8abc$**이며,** 이때 (b,c)는 yz평면에서 원위에 있는 점이므로 원점을 중심으로 거리가 일정하다. b^2+c^2**=상수이고** bc**의 곱이 최대가 되어야 하므로,** $b^2+c^2\geq 2bc$ **부등식을 이용하면, 곱이 최대가 될 때** $b=c$**이므로,** $\theta=\frac{\pi}{4}$**이다.**

(2) (1)의 결과로 직육면체 R의 부피는 $4ay^2$이다.

(a,y)는 타원위의 점이므로 $y^2=1-\frac{a^2}{2}$를 대입하면, 직육면체의 부피는 $4a-2a^3$이 된다.

위 식에서 $a\in[0,\sqrt{2}]$ 이므로 $f(a)=4a-2a^3$로 두면 $a=\sqrt{\frac{2}{3}}$에서 $f(a)$가 최대가 된다.

(그리고 이때, $y=\sqrt{\frac{2}{3}}$이다.)

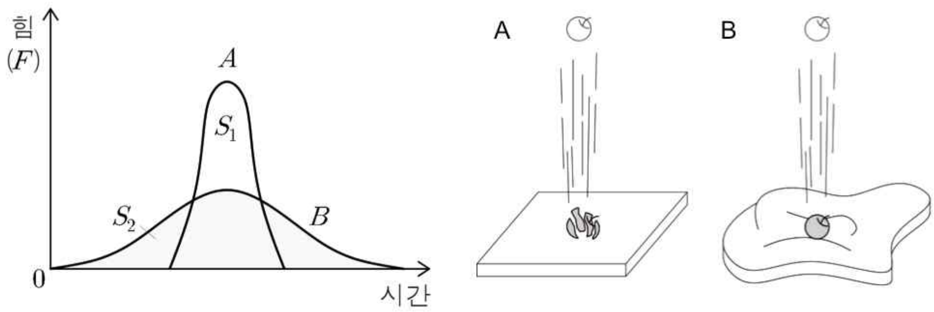
따라서 부피가 최대가 되는 $a=\sqrt{\frac{2}{3}}$, $b,c=\sqrt{\frac{1}{3}}$ 이므로, 가로, 세로, 높이는 $2\sqrt{\frac{2}{3}}$, $2\sqrt{\frac{1}{3}},2\sqrt{\frac{1}{3}}$으로 결정된다.

<논제 II-1>

(1) 운동량 $p=mv$이므로 지구에서 사과의 운동량을 구하기 위해서는 사과가 바닥에 닿기 직전의 속도 v를 구해야 한다. 높이 h에서 질량 m인 사과의 위치에너지는 $E_k=mgh$ 이고, 바닥에 닿기 직전의 사과의 속도는 역학적 에너지 보존 법칙에 의해 $mgh=\frac{1}{2}mv^2$의 관계식으로부터 $v=\sqrt{2gh}$가 된다. 따라서 지구에서 바닥에 닿기 직전 사과의 운동량은 $p=mv=m\sqrt{2gh}$가 된다. 한편, 달에서는 중력이 지구의 1/6이므로 달에서의 사과의 질량을 m', 초기 높이를 h'라 할 때, 달에서 자유 낙하에 의해 바닥에 닿기 직전 사과의 운동량은 $p'=m'v'=m'\sqrt{2\frac{g}{6}h'}=m'\sqrt{\frac{1}{3}gh'}$가 된다. 사과의 운동량이 지구와 달에서 같으려면 $p=p'$이므로 $p'=m'\sqrt{\frac{1}{3}gh'}=p=m\sqrt{2gh}$가 되고, 정리하면 달에서 사과의 질량과 높이는 다음과 같은 관계 $(m')^2h'=6m^2h$가 된다. 같은 질량의 사과를 사용하는 경우 달에서의 초기 높이는 $h'=6h$, 즉, 지구에서보다 6배 높은 위치에서 사과를 떨어뜨리면 되고, 높이가 같은 경우 달에서의 사과 질량은 $m'=\sqrt{6}m$, 즉, 지구에서 사용한 사과보다 $\sqrt{6}$배되는 질량의 사과를 사용하면 된다.

(2) 충격량은 $I=F\Delta t=\Delta p$과 같이 나타낼 수 있다. 사과가 그림 A와 같이 딱딱한 바닥에 떨어져 깨지는 경우와 그림 B와 같이 푹신한 바닥에 떨어져 깨지지 않는 경우는 아래 힘과 시간에 대한 그래프로 설명할 수 있다. 사과가 바닥에 떨어져 깨지지 않게 하려면 사과가 받는 충격력 F를 작게 해야 한다. 외부에서 추가적인 힘이 작용하지 않았으므로 A와 B의 경우 운동량 변화량 Δp는 같다. 따라서 충격량이 같으므로 (즉, $S_1=S_2$) 사과가 바닥에 닿아 힘을 받는 시간 Δt를 길게 하면 충격력을 작게 하여 사과가 깨지지 않게 할 수 있다.

아래 그래프에서 A는 사과가 딱딱한 바닥에 떨어지는 경우로 Δt가 작고 F가 크다. 반면, 충격량이 같으므로 B와 같이 푹신한 바닥에 사과가 떨어지는 경우 Δt가 커져 충격력 F가 작아진다. 따라서, 푹신한 바닥에서는 사과가 깨지지 않는다.



<논제 II-2>

(1)

반응성이 다른 두 금속이 전기적으로 연결된 상태에서 산화가 일어날 수 있는 환경에 놓이게 되면 산화 반응성이 더 큰 금속에서 우선적으로 산화로 인한 부식이 진행되고 상대 금속에서는 환원 반응이 일어나 부식이 방지된다. 논제에서 제시된 아연 덩어리가 철로 만들어진 선체보다 반응성이 더 크므로 먼저 부식되어 선체를 바닷물에 의한 부식으로부터 보호하게 된다. 이러한 부식 방지법을 음극화 보호라고 부른다.
한편 희생 음극으로 사용되기 위해서는 철보다 반응성이 더 커야 한다. 따라서 반응성이 더 작은 주석은 음극화 보호에 적절하지 않다. 알루미늄은 아연보다도 반응성이 더 커서 희생 음극의 필요조건을 만족시키지만, 제시문의 설명대로 표면에 생성된 산화 보호막 때문에 자체의 산화 반응이 저해되어 음극화 보호에 부적절하다고 유추할 수 있다. 나트륨은 알루미늄과 같이 반응성 면에서 희생 음극의 필요조건을 만족하나, 제시문의 설명대로 이온화 경향이 너무 강해 물과 격렬한 반응을 하면서 소모된다. 따라서 음극화 보호에 적절하지 않다고 판단할 수 있다.

(2)

산화에 따른 함석판의 단면 층구조의 변화에 따라 다음과 같이 네 단계로 구분할 수 있다.
(i) 탄산아연 층이 존재할 때: 탄산아연 층으로 인해 아연이 산성을 띄는 오렌지 주스 용액과 직접 닿지 않으므로 산화가 진행되지 않는다. 따라서 이런 단계에서 마신 주스는 아연 이온이 포함되지 않으므로 건강에 영향을 미치지 않는다고 유추할 수 있다.
(ii) 탄산아연 층이 일부 벗겨졌을 때: 아연은 수소보다 반응성이 더 크므로 노출된 아연 표면에서 산화 반응이 일어나 아연 이온이 주스 속으로 녹아들어 간다. 따라서 주스와 함께

아연 이온을 과다 흡수하여 건강에 위험이 될 수 있다.
(iii) 아연 층의 일부가 다 녹아 없어져 철이 노출되었을 때: 반응성이 다른 두 금속이 전기적으로 연결된 상태에서 산성 용액에 닿으면 논제(1)의 답안에서 설명한 음극화 보호 현상이 일어나게 된다. 즉, 철이 수소보다 반응성이 커서 산화될 가능성이 있지만, 반응성이 더 큰 아연이 먼저 산화되고 철은 반응하지 않는다. 결국 아연 이온이 주스로 녹아들게 되므로 여전히 건강에 영향을 미치게 된다.
(iv) 아연 층이 모두 산화되었을 때: 더 이상 희생 음극으로 작용할 아연이 없으므로 철 표면이 산화되기 시작한다. (본 제시문 만으로는 주스에 녹아든 철 이온이 건강에 미치는 영향을 판단할 수 없다.)

<논제 II-3>

(1) 높은 고도에서의 운동은 대기 중의 산소가 부족한 상황에서 이뤄지므로 호흡 시 폐로 들어오는 산소량이 적어 폐 내에서의 산소분압이 떨어지고 혈액의 헤모글로빈에 결합되어 이동되는 산소의 양이 줄어들게 된다. 이에 적응하려는 몸속의 생리적 반응은 호흡수의 증가, 폐활량의 증가, 모세혈관의 증가가 이뤄진다. 고산지대에서의 활동은 저지대에서 활동하는 것보다 체내 산소 흡수가 제한되어 미토콘드리아에서 산소를 이용하는 호흡이 더 저해되어 세포질 내에서의 해당과정과 혐기적 조건의 발효가 더 일어난다. 산소공급의 부족으로 생성된 젖산은 몸속의 근육에 축적되어 통증을 유발하게 된다.

(2) 엿당은 두 개의 포도당분자로 구성된 이당류이다. 따라서 엿당 분자 1개는 포도당 2분자로 분해된다. 엿당 500개의 분자들이 세포호흡에 의해 모두 사용되었다고 가정하면 1,000개의 포도당이 소모되었음을 알 수 있다. 포도당 1분자가 세포호흡을 통해 이산화탄소와 물 및 에너지로 분해되려면 6개의 산소와 물 분자가 각각 필요하다고 밝힌 제시문을 바탕으로 포도당과 산소 및 물이 반응을 하면 호흡의 결과 얻어지는 산물의 양을 계산할 수 있다. 또한 이 호흡을 통해 해당과정과 미토콘드리아에서 생성되는 에너지(ATP)가 38개임을 알 수 있다. 따라서 포도당 1개 분자가 해당과정과 미토콘드리아에서의 호흡과정을 통해 얻어지는 이산화탄소는 6분자, 물은 12분자, 에너지는 38ATP 이다. 1,000개의 포도당분자가 모두 산화적 세포호흡에 이용되었으면 6,000분자의 이산화탄소, 12,000분자의 물 그리고 38,000개의 ATP를 생성한다. 산소를 이용하지 못하면 포도당이 해당과정만 거치므로 2,000개의 ATP를 생성한다.