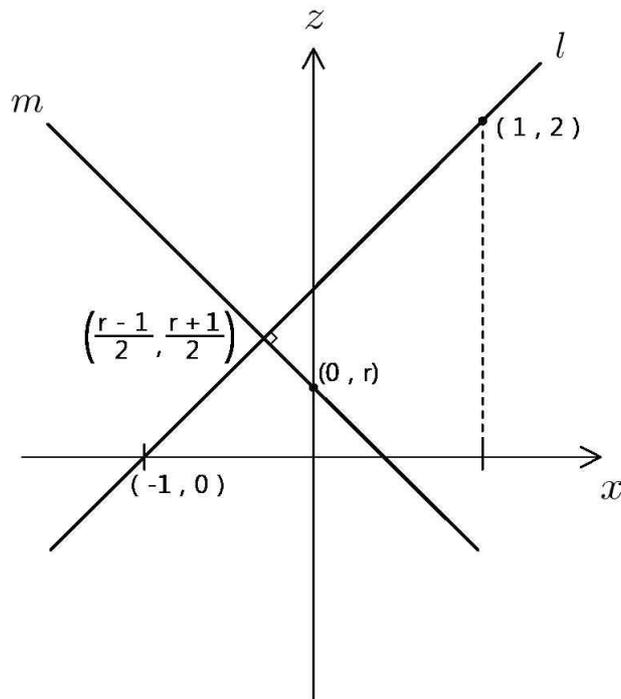


2013학년도 수시 2차 논술고사 예시답안

자연계 논술 (토) 오전

<문제 I-1>

점 C 를 지나고 직선 l 에 수직인 직선을 m 이라고 하자. 점 A 는 직선 l 과 m 의 교점이다. 직선 l 과 m 은 xz 평면에 있으므로 점 A 의 좌표를 구하기 위해서는 xz 평면에서 직선 l 과 m 의 교점을 구하면 된다. xz 평면에서의 l 의 방정식은 $z=x+1$ 이다. xz 평면에서 직선 m 은 직선 l 에 수직이므로 기울기는 -1 이고 점 $(0, r)$ 을 지나므로 직선 m 의 방정식은 $z=-x+r$ 이다. 두 방정식 $z=x+1$, $z=-x+r$ 을 연립해서 풀면 $x=\frac{r-1}{2}$, $z=\frac{r+1}{2}$. 그러므로 점 A 의 공간에서의 좌표는 $(\frac{r-1}{2}, 0, \frac{r+1}{2})$ 이다.



<문제 I-2>

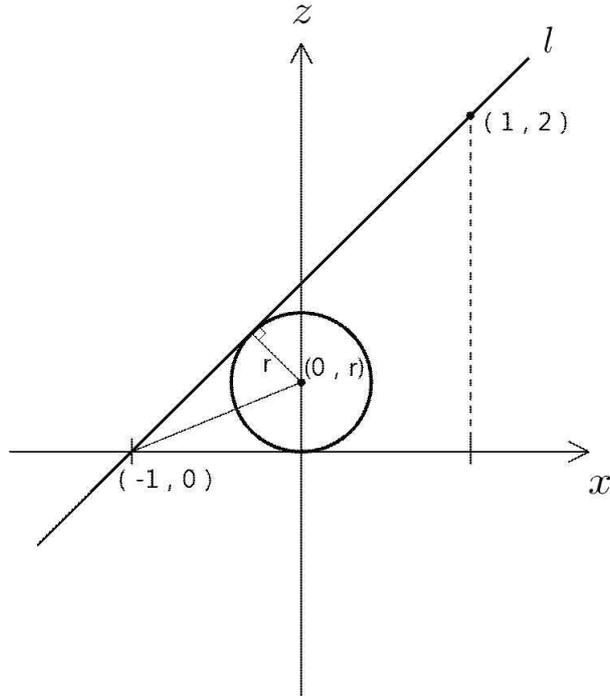
직선 l 이 구에 접하기 위해서는 구의 중심 C 와 문제 I-1에서 구한 점 A 사이의 거리가 r 이 되어야 한다. 점 A 와 C 사이의 거리는

$$\overline{AC} = \sqrt{\left(\frac{r-1}{2}\right)^2 + \left(\frac{r+1}{2} - r\right)^2}.$$

이 거리가 r 이 되기 위해서는

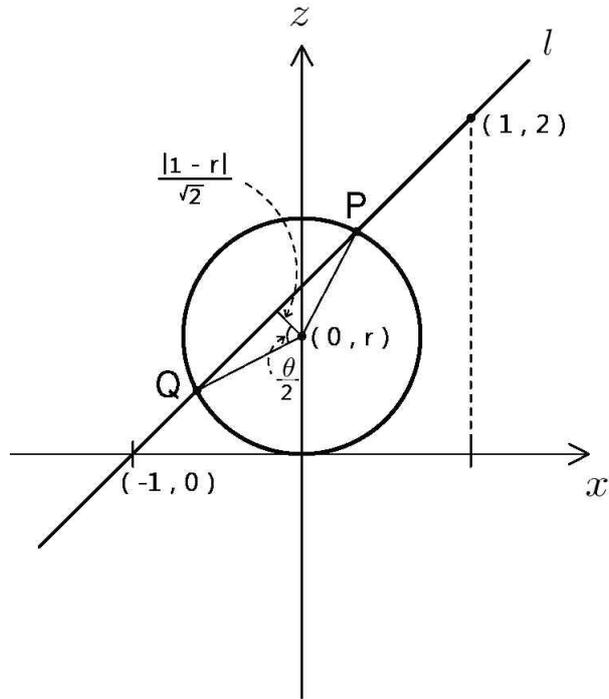
$$\sqrt{\left(\frac{r-1}{2}\right)^2 + \left(\frac{r+1}{2} - r\right)^2} = r.$$

이 식으로부터 방정식 $r^2 + 2r - 1 = 0$ 을 얻는다. 이 이차방정식의 양수 해는 $r = -1 + \sqrt{2}$. 따라서 $r = -1 + \sqrt{2}$ 일 때 직선 l 은 구에 접한다.



<문제 I-3>

\overline{CP} 와 \overline{CQ} 가 이루는 각 θ 을 알면 점 P, Q 를 지나는 대원의 중심각이 θ 인 부채꼴의 호의 길이를 구하면 된다. 중심각 θ 를 구하기 위해서 $\angle ACQ = \frac{\theta}{2}$ 인 직각삼각형 ACQ 를 이용한다. $r = \frac{1}{2}$ 일 때, $\overline{QC} = \frac{1}{2}$, $\overline{AC} = \frac{1}{2\sqrt{2}}$ 이다. 따라서 $\cos \frac{\theta}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$. 즉, $\theta = \frac{\pi}{2}$. 중심각이 $\frac{\pi}{2}$ 이고 반지름이 $\frac{1}{2}$ 인 부채꼴의 호의 길이는 $\frac{\pi}{4}$. 그러므로 P, Q 를 잇는 구면 위의 가장 짧은 곡선의 길이는 $\frac{\pi}{4}$ 이다.



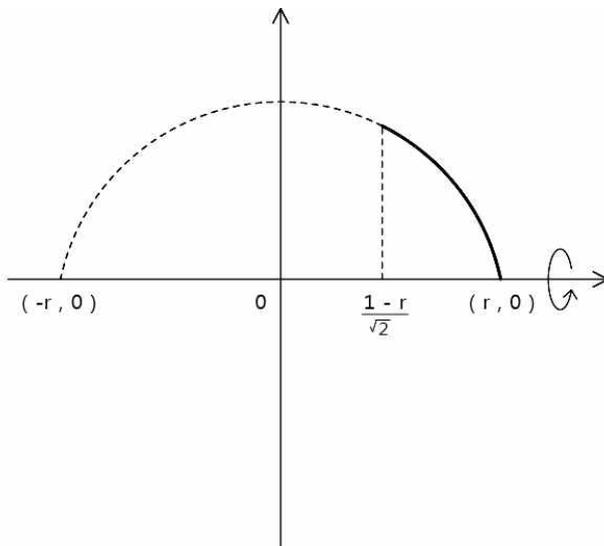
<문제 I-4>

주어진 평면이 y 축에 평행하므로 구와 주어진 평면 사이의 거리는 구와 직선 l 과의 거리와 같다. 문제 I-1에 의해 $r = -1 + \sqrt{2}$ 일 때 구와 직선 l 이 접하므로 평면이 구를 자르기 위해서는 r 이 $-1 + \sqrt{2}$ 보다 큰 값을 가져야 한다. 구의 중심과 주어진 평면과의 거리는

$$\overline{AC} = \sqrt{\left(\frac{r-1}{2}\right)^2 + \left(\frac{r+1}{2} - r\right)^2} = \frac{|1-r|}{\sqrt{2}}.$$

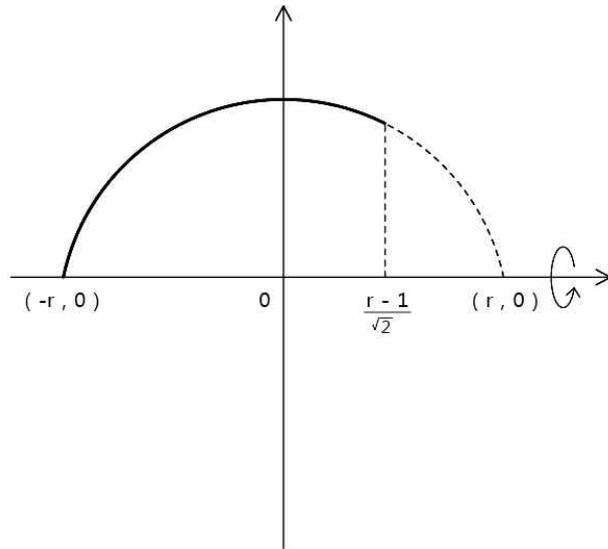
따라서 구의 잘려진 윗부분의 부피는 평면에서 반지름이 r 이고 중심이 원점 $(0,0)$ 인 원의 일부를 x 축을 중심으로 회전시켜 얻어지는 회전체의 부피와 같다. r 의 범위에 따라 다음의 두 경우로 나뉜다.

$-1 + \sqrt{2} < r < 1$ 일 때, 구의 잘려진 윗부분의 부피는 다음의 그래프를 x 축을 중심으로 회전시켜 얻어지는 회전체의 부피와 같다.



따라서 부피는 적분 $\int_{\frac{1-r}{\sqrt{2}}}^r \pi(r^2 - x^2)dx$ (혹은 $\int_{-r}^{\frac{r-1}{\sqrt{2}}} \pi(r^2 - x^2)dx$)를 계산하면 된다.

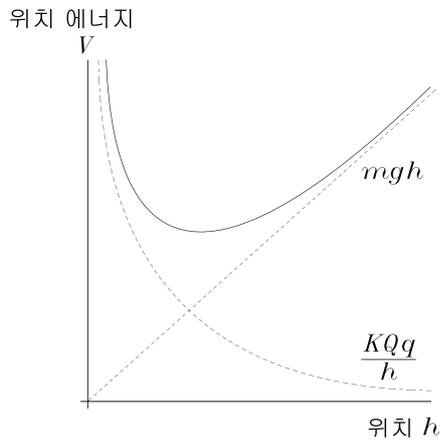
$r \geq 1$ 일 때는 구의 잘려진 윗부분의 부피는 다음의 그래프를 x 축을 중심으로 회전시켜 얻어지는 회전체의 부피와 같다.



따라서 부피는 적분 $\int_{-r}^{\frac{r-1}{\sqrt{2}}} \pi(r^2 - x^2)dx$ (혹은 $\int_{\frac{1-r}{\sqrt{2}}}^r \pi(r^2 - x^2)dx$)를 계산하면 된다.

<문제 II-1>

(1) 공 B의 위치가 h 일 때 중력 위치에너지는 mgh 이다. 정전기력에 의한 위치에너지는 $V = \frac{kQq}{h}$ 이므로 총 위치에너지는 $V = mgh + \frac{kQq}{h}$ 이다. 그래프로 나타낸 총 위치에너지는 최솟값을 가지며 아래로 오목한 곡선 형태이다. 용수철의 위치에너지와 마찬가지로, 역학적 에너지가 위치에너지의 최솟값과 같으면 공 B는 평형점에 정지하게 되고 이보다 큰 경우 역학적 에너지가 위치에너지보다 큰 구간을 왕복운동 (진동운동)을 하게 된다. 즉 공 B는 관을 따라 아래위로 왕복운동 (진동운동)을 한다.



(2) 마찰력이 작용하면 역학적 에너지는 보존되지 못하고 열로 전환되면서 최종 역학적 에너지를 이룰 때 까지 감소한다. 이에 따라 공 B의 왕복운동(진동운동)의 구간(진폭)은 점차 줄어들어 평형점에 정지하게 된다. 이 과정동안 열로 전환된 에너지의 양은 초기 역학적 에너지 E 와 최종 역학적 에너지와의 차이이다. 최종 역학적 에너지는 위치에너지의 최솟값이므로 위치에너지가 최소가 되는 평형점의 위치를 구한다. $V' = mg - \frac{kQq}{h^2} = 0$

로부터 평형점 위치 h 는 $\sqrt{\frac{kQq}{mg}}$ 이다. 따라서 최종 역학적 에너지는 $2\sqrt{mgkQq}$ 와 같다. 열로 전환된 에너지는 $E - 2\sqrt{mgkQq}$ 이다.

<문제 II-2>

(1)

주어진 반응식을 통해 산화 반응 후에 상당량의 질소와 이산화탄소 기체가 생성된다는 사실을 알 수 있다. 상온 상압에서 기체는 같은 질량의 고체에 비해 부피가 천 배 정도 크기 때문에, 산화 반응으로 만들어진 기체가 탄피 내부의 좁은 공간에 갇히게 되면 보일의 법칙에 따라 부피에 반비례하여 압력이 증가하게 된다. 또한 산화 반응으로 많은 열이 생겨나기 때문에 기체의 온도가 높아지게 된다. 샤를의 법칙에 따라 기체의 부피가 늘어나야 하나, 탄두가 발사되기 전까지는 탄피 내부의 부피가 고정되어 있으므로 기체가 더욱 압축되게 된다. 즉, 생성된 많은 기체와 발생된 열 때문에 탄피 내부 압력이 증가하게 된다. 따라서 탄두의 단면적과 압력의 곱에 비례하는 힘이 탄두에 가해져 탄두가 발사된다. 이러한 과정을 거쳐서 발사약의 화학 에너지가 운동하는 탄두의 역학적 에너지로 변환된다.

(2)

동일한 화학 반응식을 따른다고 하였으므로 만들어진 기체의 양은 문제(1)의 경우와 같다고 유추할 수 있다. 따라서 기체의 생성으로 인해 증가된 내부 압력이 탄두에 가하는 힘은 같다고 생각할 수 있다. 한편 산화 속도가 고성능 폭약처럼 증가되어 충격파가 만들어지면 상당량의 에너지가 충격파의 형태로 탄피 벽을 통해 밖으로 발산된다. 화학 에너지로부터 변환된 에너지의 총량은 문제(1)의 경우와 동일하므로 생성된 열에너지는 충격파의 전파로 인한 에너지 손실만큼 감소하게 된다고 유추할 수 있다. 따라서 산화 반응 직후 탄피 내부 기체의 온도가 문제(1)의 경우보다 낮으므로, 샤를의 법칙에 따라 탄피 내부의 압력 상승과 그로 인해 탄두에 가해지는 힘도 그 만큼 감소한다. 즉, 문제(1)의 경우에 비해 온도 상승이 둔화되어 탄두의 발사 속도가 감소하므로 소총의 성능이 저하된다고 유추할 수 있다.

<문제 II-3>

(1) 돌연변이가 없이 정상적으로 단백질 합성이 이루어지면, ATG에서 시작해서 아미노산이 10개인 단백질이 합성된다. 그런데, 문제에서 제시된 가정처럼 모든 염기서열에서 돌연변이가 생길 수 있으므로, 아래의 7개의 염기들에 점 돌연변이가 생기면 정상적인 단백질과는 다른 수의 아미노산을 갖는 단백질이 합성되거나 전혀 합성되지 못한다.

1번 A, 2번 T, 3번 G: 각각 다른 세 가지의 어떤 염기 중 하나로 바뀐 경우에도 단백질의 합성을 시작하는 코돈이 사라져 단백질 합성이 이루어지지 않음.

4번 G, 7번 G, 13번 C: 이들의 경우 티민(T)으로 바뀌면 단백질 합성이 중단된다. 그러므로, 각각 아미노산 수가 1, 2, 4개를 갖는 단백질이 합성된다.

17번 C: 이 경우는 아네닌(A)이나 구아닌(G)으로 바뀌면 단백질 합성이 중단된다. 그러므로, 아미노산이 5개인 단백질이 합성된다.

이 이외의 염기들도 바뀔 수가 있지만, 이 경우들에서는 아미노산의 수에 변화가 없다.

(2) 제시문 [마]에 언급된 것처럼 TP53 유전자는 정상세포에도 존재하는데, 이 유전자는 정상적인 기능을 하는 단백질 만들어 세포분열을 제어한다. 그런데, 암세포에서 TP53 유전자가 정상세포에서처럼 정상적으로 발현되고 있다면, 제시문 [마]에 언급된 돌연변이 방법들에 의해 TP53 유전자 염기서열에 돌연변이가 생겼을 것이다. 이 돌연변이의 결과로 정상단백질과는 다른 아미노산을 갖는 단백질들이 만들어지거나 크기가 다른 단백질들이 만들어질 것이다. 이렇게 만들어진 단백질들은 세포분열을 억제하는 정상적인 기능을 수행할 수 없어서 세포분열을 더 이상 제어할 수 없을 것이다.