경희대학교 2012학년도

모의 논술고사 문제지(자연계 Ⅰ)

접수번호 | | | | | | 성 명 (   )

<유의사항>

1. 제목은 쓰지 마시고 특별한 표시를 하지 마시오.
2. 제시문 속의 문장을 그대로 쓰지 마시오.
3. 답안작성과 정정은 반드시 본교에서 지급한 필기구를 사용하시오.
4. 본교에서 지급한 필기구를 사용하지 않았거나, 답안지에 특별한 표시를 한 경우에는 감점 또는 0점 처리합니다. (예: 감사합니다. 등)
5. 답안 정정 시에 수정액 등을 사용한 경우에는 감점 처리합니다.

※ 다음 제시문을 읽고 논제에 답하시오.

[가] 수학적 귀납법은 어떤 주장이 모든 자연수에 대해 성립함을 증명하기 위해 사용되는 방법이다. 우선 첫 번째 명제가 참임을 증명하고, 그 다음에는 명제들 중에서 어떤 하나가 참이면 언제나 그 다음 명제도 참임을 증명하는 방법으로 이루어진다. 수학적 귀납법은 도미노 게임에 비유될 수 있다. 잘 배열된 막대들은 다음 두 가지 사실을 만족하면 모두 무너뜨릴 수 있다. 첫째, 처음의 막대가 넘어지고, 둘째, 한 막대기가 넘어지면 다음의 막대도 반드시 넘어진다.

[나] 뉴턴(Newton)과 라이프니쯔(Leibniz)가 독립적으로 체계화한 미분은 현대 과학 기술 발달의 중요한 기틀 중 하나이다. 미분의 과학과 공학에서의 활용에는 함수를 한 번 미분한 도함수 $f'(x)$뿐만 아니라 두 번 이상의 미분, 즉 고차도함수도 필요하다. 도함수의 도함수인 $f''(x)=(f'(x))'$ 를 이계도함수라 부르고, 이계도함수의 도함수 $f'''(x)=(f''(x))'$ 는 $f^{(3)}(x)$라 표기한다. 이와 같은 방법으로 $f^{(n)}(x)$를 정의할 수 있고 이것을 함수 $f(x)$의 n계 도함수라 한다. 미분을 정의하는데 극한을 사용하지만, 미분은 로피탈(L'Hospital) 정리를 이용하면 극한을 구하는데 도움을 줄 수 있다. 로피탈(L'Hospital) 정리는 $\frac{0}{0}$ 또는 $\frac{\infty}{\infty}$ 형의 부정형을 갖는 $\frac{f(x)}{g(x)}$ 모양의 함수의 극한을 구할 때 유용하며, 구체적으로, “a의 근방에서 f와 g가 미분가능하고 $g'(x)\neq 0$일 때, $\lim_{x\to a} f(x)=0$, $\lim_{x\to a} g(x)=0$이거나, 또는 $\lim_{x\to a} f(x)=\infty$, $\lim_{x\to a} g(x)=\infty$이고, 극한값 $\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$이 존재하면, $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$이 성립한다.” 는 것이다. 로피탈이 1696년에 익명으로 출판한 책에는 “$\frac{0}{0}$ 의 법칙” 으로 이 정리가 소개되는데, 이 정리는 요한 베르누이에 의하여 발견되었다.

<논제 I> 제시문 [가] 와 [나] 를 참조하여 다음 질문에 답하시오. (30점)

정의역의 구간에 따라 다양한 함숫값을 가지는 미분가능한 함수를 구성하는 것은 매우 흥미롭고 특히 이와 같은 함수를 이용하여 주어진 함수보다 미분가능한 범위가 확장된 새로운 함수를 생각할 수 있다는 사실이 알려져 있다. 이와 관련하여 다음과 같이 주어진 함수 $f: R\to R$ 을 생각해 보자 (단, R 은 실수 전체의 집합이다)

$$f(x)=\begin{cases}0 & x\le 0\\ e^{-\frac{1}{x}} & x>0\end{cases}$$

(1) 점 $x=0$에서 함수 $f(x)$의 미분가능성을 미분계수의 정의를 이용하여 조사하고, 그 근거를 서술하시오.

(2) 수학적 귀납법을 이용하여 함수 $f(x)$의 n계 도함수 $f^{(n)}(x)$ 의 $x=0$ 에서의 값을 확인하고, 그 근거를 서술하시오.

(3) 위에서 정의한 함수 $f(x)$를 이용하여 새로운 함수 $h: R\to R$를 $h(x)=\frac{f(x)}{f(x)+f(1-x)}$ 와 같이 정의할 때, 이 함수 $h(x)$는 R 에서 미분가능하고, $x\in R$ 에서는 $0\le h(x)\le 1$이며, $x\le 0$에서는 $h(x)=0$이고, $x\ge 1$ 에서는 $h(x)=1$이 됨을 확인하고 그 근거를 서술하시오.

(4) 위에서 정의한 함수 $h(x)$를 이용하여 새로운 함수 $g: R\to R$를 $g(x)=h(\frac{x+a}{a-b})h(\frac{-x+a}{a-b})$ 와 같이 정의할 때 (단, $a>b>0$), 이 함수 $g(x)$의 미분가능성을 확인하고 그 근거를 서술하시오. 그리고 $g(x)$의 함숫값이 0이 되는 구간과 1이 되는 구간에 대하여 조사하시오. 그리고 함수 $g(x)$의 그래프를 간단히 보이시오.