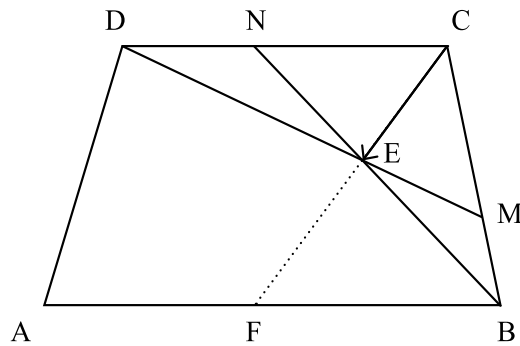


의예과 논술전형 문제

[문항 1] 제시문 (ㄱ)~(ㄷ)을 읽고 논제에 답하시오. (100점)

(ㄱ)

아래 그림과 같이 \overline{AB} 와 \overline{CD} 가 서로 평행인 사다리꼴 $ABCD$ 에서 \overline{BC} 를 삼등분한 점 중 B 에 가까운 점을 M , \overline{CD} 를 3:2로 내분한 점을 N , \overline{BN} 과 \overline{DM} 의 교점을 E , \overline{CE} 을 포함하는 직선과 \overline{AB} 를 포함하는 직선의 교점을 F 라고 하자.



(ㄴ)

제시문 (ㄱ)의 그림에서 벡터 \overrightarrow{CE} 는 상수 m, n 에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

$$\overrightarrow{CE} = m \overrightarrow{CB} + n \overrightarrow{CD}$$

(ㄷ)

제시문 (ㄱ)의 그림에서 벡터 \overrightarrow{CF} 는 상수 k 에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

$$\overrightarrow{CF} = k \overrightarrow{CE}$$

[논제] 제시문 (ㄴ)의 상수 m, n 과 제시문 (ㄷ)의 상수 k 를 각각 구하고 그 근거를 논술하시오. (100점)

[문항 1] 출제 의도 및 해설, 평가 기준

출제 의도

그림에서의 평면 벡터를 이해하고 벡터의 평행 및 세 점은 한 직선 위에 있기 위한 벡터의 조건을 활용할 수 있는지를 평가하는 문제다.

문항 해설

세 점이 한 직선 위에 있기 위한 평면 벡터의 조건 및 벡터의 평행 조건을 활용하여 상수 m, n 과 상수 k 를 구할 수 있는지를 평가한다.

평가 기준

[논제] (100점)

<p>$\triangle CDM$에서 점 E는 \overline{DM} 위에 있으므로 다음이 성립한다.</p> $\overrightarrow{CE} = t\overrightarrow{CD} + (1-t)\overrightarrow{CM} \quad (0 \leq t \leq 1)$ <p>한편, $\triangle BCN$에서는 점 E가 \overline{BN} 위에 있으므로</p> $\overrightarrow{CE} = s\overrightarrow{CN} + (1-s)\overrightarrow{CB} \quad (0 \leq s \leq 1)$ <p>이다. 점 M은 \overline{BC}의 삼등분 점 중 점 B에 가까운 점이므로 $\overrightarrow{CM} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CB}$ 이고.</p> <p>점 N은 \overline{CD}를 3:2로 내분한 점이므로 $\overrightarrow{CN} = \frac{3}{5}\overrightarrow{CD}$이다. 즉,</p> $\overrightarrow{CE} = t\overrightarrow{CD} + \frac{2}{3}(1-t)\overrightarrow{CB} = \frac{3}{5}s\overrightarrow{CD} + (1-s)\overrightarrow{CB}$ <p>이다.</p>	30점
<p>영벡터가 아닌 두 벡터 $\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{CB}$ 가 서로 평행하지 않으므로 s, t는</p> $t = \frac{3}{5}s \Rightarrow 3s - 5t = 0$ $\frac{2}{3}(1-t) = 1-s \Rightarrow 3s - 2t = 1$ <p>을 만족하고, 이를 연립해서 풀면 $s = \frac{5}{9}, t = \frac{1}{3}$이다.</p> <p>그러므로 $\overrightarrow{CE} = \frac{4}{9}\overrightarrow{CB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{CD}$, 즉 $m = \frac{4}{9}, n = \frac{1}{3}$이다.</p>	30점

한편, \overrightarrow{BF} 와 \overrightarrow{CD} 는 평행이므로 실수 l 에 대하여 $\overrightarrow{BF} = l\overrightarrow{CD}$ 이다. 따라서

$$\overrightarrow{CF} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BF} = \overrightarrow{CB} + l\overrightarrow{CD}$$

이고, 또 제시문 (ㄷ)에서 $\overrightarrow{CF} = k\overrightarrow{CE}$ 를 만족하므로

$$\overrightarrow{CF} = k\overrightarrow{CE} = \frac{4}{9}k\overrightarrow{CB} + \frac{1}{3}k\overrightarrow{CD}$$

이다.

30점

그러므로

$$\overrightarrow{CF} = \overrightarrow{CB} + l\overrightarrow{CD} = \frac{4}{9}k\overrightarrow{CB} + \frac{1}{3}k\overrightarrow{CD}$$

이고, \overrightarrow{CB} 와 \overrightarrow{CD} 는 평행이 아니므로 $\frac{4}{9}k = 1$, $\frac{1}{3}k = l$ 이다. 따라서, $k = \frac{9}{4}$ 이다.

10점

[문항 2] 제시문 (ㄱ)~(ㄹ)을 읽고 논제에 답하십시오. (100점)

(ㄱ)

결승전에 오른 A, B 두 팀이 다음과 같은 규칙에 따라 경기를 하여 우승팀을 정하려고 한다.

- 4번의 경기를 먼저 이기는 팀이 우승한다.
- 모든 경기는 승패가 결정되고 무승부는 없다.

(ㄴ)

제시문 (ㄱ)의 매 경기에서 각 팀이 이길 확률은 다음 조건을 만족시킨다.

- 첫 경기에서 이길 확률은 양 팀 모두 $\frac{1}{2}$ 이다.
- n 번째까지의 경기 전적이 s 승 t 패인 팀이 $(n+1)$ 번째 경기를 이길 확률은 $\frac{5+(s-t)}{10}$ 이다.
(단, $s+t=n$)

(ㄷ)

제시문 (ㄱ)의 결승전에서 두 번째 경기까지의 전적이 두 팀 모두 1승 1패인 사건을 E , 5번 이하의 경기에서 우승팀이 정해지는 사건을 F 라고 하자.

(ㄹ)

[조건부확률] 사건 A 가 일어났을 때의 사건 B 의 조건부확률은 다음과 같다.

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \quad (\text{단, } P(A) > 0)$$

[논제] 제시문 (ㄷ)의 사건 E, F 에 대하여 조건부확률 $P(E|F)$ 를 구하고 그 근거를 논술하십시오. (100점)

[문항 2] 출제의도 및 해설, 평가기준

출제의도

- 가) 사건의 독립과 종속의 의미를 이해하고 있는지 확인한다.
- 나) 조건부 확률의 뜻을 알고 이를 구할 수 있는지 확인한다.
- 다) 확률의 곱셈정리를 이해하고 이를 활용할 수 있는지 확인한다.

문항해설

- 사건의 독립과 종속의 의미를 이해하고 사건의 확률을 구할 수 있는지를 평가한다.
- 조건부 확률과 확률의 곱셈정리 활용하여 값을 구할 수 있는지를 평가한다.

평가기준

[문제] (100점)

<p>5번 이하의 경기에서 A팀이 우승팀으로 정해지는 경우는 4번째 또는 5번째 경기에서 A팀이 우승 팀으로 정해지는 경우이고 확률은 A는 A팀이 승리, B는 B팀이 승리하는 경우로 표시하면 다음과 같다.</p> <p>(1) AAAAA의 순서로 이기는 경우의 확률 : $\frac{5}{10} \times \frac{6}{10} \times \frac{7}{10} \times \frac{8}{10} = \frac{1680}{10^4}$</p> <p>(2) AAABA의 순서로 이기는 경우의 확률 : $\frac{5}{10} \times \frac{6}{10} \times \frac{7}{10} \times \frac{2}{10} \times \frac{7}{10} = \frac{294}{10^4}$</p> <p>(3) AABAA의 순서로 이기는 경우의 확률 : $\frac{5}{10} \times \frac{6}{10} \times \frac{3}{10} \times \frac{6}{10} \times \frac{7}{10} = \frac{378}{10^4}$</p> <p>(4) ABAAA의 순서로 이기는 경우의 확률 : $\frac{5}{10} \times \frac{4}{10} \times \frac{5}{10} \times \frac{6}{10} \times \frac{7}{10} = \frac{420}{10^4}$</p> <p>(5) BAAAA의 순서로 이기는 경우의 확률 : $\frac{5}{10} \times \frac{4}{10} \times \frac{5}{10} \times \frac{6}{10} \times \frac{7}{10} = \frac{420}{10^4}$</p>	30점
<p>따라서 5번 이하의 경기에서 A팀이 우승팀으로 결정될 확률은 위의 모든 경우의 확률을 더한 $\frac{3192}{10^4}$ 이고 같은 방법으로 5번 이하의 경기에서 B팀이 우승팀으로 결정될 확률도 $\frac{3192}{10^4}$ 이다. 즉 제시문 (ㄴ)의 사건 F에 대하여 $P(F) = \frac{6384}{10^4}$ 이다.</p>	30점
<p>또한 A팀이 우승팀일 때 $E \cap F$의 경우는 위의 (4), (5)의 경우이고 그 확률은 $\frac{420 \times 2}{10^4} = \frac{840}{10^4}$ 이다. 같은 방법으로 B팀이 우승팀일 경우의 확률이 같으므로 $P(E \cap F) = \frac{1680}{10^4}$ 이다.</p>	30점
<p>그러므로 구하는 조건부 확률 $P(E F) = \frac{P(E \cap F)}{P(F)} = \frac{1680}{6384} = \frac{5}{19}$ 이다.</p>	10점

[문항 3] 제시문 (ㄱ)~(ㄷ)을 읽고 논제에 답하십시오. (110점)

(ㄱ)

함수 $f(t)$ 는 다음과 같다.

$$f(t) = 2(1 - |t - 1|) \quad \left(0 \leq t \leq \frac{4}{3}\right)$$

(ㄴ)

제시문 (ㄱ)의 $f(t)$ 에 대하여 $g(x)$ 는 다음과 같다.

$$g(x) = \int_0^x |x - f(t)| dt \quad \left(0 \leq x \leq \frac{4}{3}\right)$$

(ㄷ)

제시문 (ㄴ)의 $g(x)$ 에 대하여 다음 조건을 만족시키는 실수 a 전체의 집합을 A 라고 하자.

곡선 $y = g(x)$ 와 직선 $y = ax$ 는 구간 $\left[0, \frac{4}{3}\right]$ 에서 서로 다른 세 점에서 만난다.

[논제] 제시문 (ㄷ)의 A 를 구하고 그 근거를 논술하십시오. (110점)

[문항 3] 출제의도 및 해설, 평가기준

출제의도

- 가) 절댓값을 포함한 함수를 이해하는지 확인한다.
- 나) 정적분으로 정의된 함수를 이해하고 이를 구할 수 있는지 확인한다.

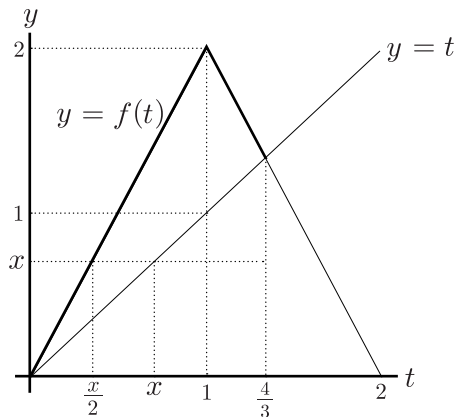
문항해설

- 주어진 함수 $f(t)$ 를 이해하는지를 평가한다.
- 정적분으로 정의된 함수 $g(x)$ 를 이해하고 함수를 정확히 구할 수 있는지를 평가한다.
- 미분을 이용하여 주어진 두 함수의 교점의 개수를 판단할 수 있는지를 평가한다.

평가기준

[논제] (110점)

$f(t)$ 는 $0 \leq t \leq 1$ 에서는 $f(t) = 2t$, $1 \leq t \leq \frac{4}{3}$ 에서는 $f(t) = 4 - 2t$ 이다.



그림에서와 같이 $0 \leq x \leq \frac{4}{3}$ 일 때, $x > f(t)$ 인 범위는 $0 \leq t < \frac{x}{2}$ 이고,
 $x \leq f(t)$ 인 범위는 $\frac{x}{2} \leq t \leq \frac{4}{3}$ 이므로

$$g(x) = \int_0^{\frac{x}{2}} (x - f(t)) dt + \int_{\frac{x}{2}}^{\frac{4}{3}} (f(t) - x) dt$$

이다. $\int_{\frac{x}{2}}^{\frac{4}{3}} (f(t) - x) dt$ 에서 $f(t)$ 는 t 의 범위에 따라 달라진다.

따라서 $g(x)$ 는 x 가 1보다 클 때와 작을 때에 따라 다음과 같이 표현할 수 있다.

20점

1) $0 \leq x \leq 1$ 일 때

$$\begin{aligned}g(x) &= \int_0^{\frac{x}{2}} (x - f(t))dt + \int_{\frac{x}{2}}^x (f(t) - x)dt \\ &= \int_0^{\frac{x}{2}} (x - 2t)dt + \int_{\frac{x}{2}}^x (2t - x)dt \\ &= [xt - t^2]_0^{\frac{x}{2}} + [t^2 - xt]_{\frac{x}{2}}^x = \frac{x^2}{2}\end{aligned}$$

이 된다.

20점

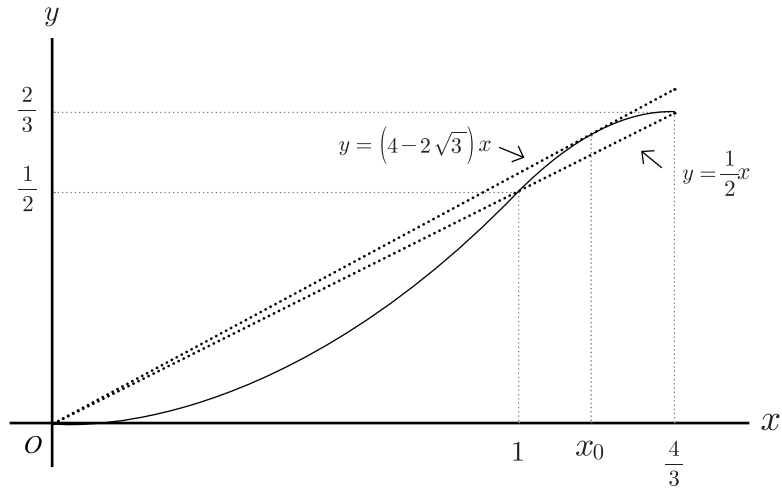
2) $1 < x \leq \frac{4}{3}$ 일 때

$$\begin{aligned}g(x) &= \int_0^{\frac{x}{2}} (x - f(t))dt + \int_{\frac{x}{2}}^x (f(t) - x)dt \\ &= \int_0^{\frac{x}{2}} (x - 2t)dt + \int_{\frac{x}{2}}^1 (2t - x)dt + \int_1^x (4 - 2t - x)dt \\ &= [xt - t^2]_0^{\frac{x}{2}} + [t^2 - xt]_{\frac{x}{2}}^1 + [4t - t^2 - xt]_1^x \\ &= -\frac{3x^2}{2} + 4x - 2\end{aligned}$$

이 된다. 따라서

$$g(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{2} & (0 \leq x \leq 1) \\ -\frac{3x^2}{2} + 4x - 2 & (1 < x \leq \frac{4}{3}) \end{cases}$$

30점



10점

또한 $y = g(x)$ 와 직선 $y = ax$ 가 서로 다른 세 점에서 만나기 위해서는 위 그래프와

같이 $y = ax$ 가 $(1, \frac{1}{2}), (\frac{4}{3}, \frac{2}{3})$ 를 지나야 하므로 직선의 기울기 a 는 $\frac{1}{2}$

이상이어야 하고, $y = g(x)$ 와 직선 $y = ax$ 가 구간 $[1, \frac{4}{3}]$ 에서 접할 때의 직선의 기울기보다 작아야 한다.

이때 접하는 점의 x 좌표를 x_0 라고 하면, x_0 은

$$\begin{cases} -3x_0 + 4 = a \\ -\frac{3}{2}x_0^2 + 4x_0 - 2 = ax_0 \end{cases}$$

을 만족하고, 연립해서 풀면 양수인 x_0 는 $\frac{2\sqrt{3}}{3}$, $a = 4 - 2\sqrt{3}$

이므로 직선의 기울기 a 는 $4 - 2\sqrt{3}$ 보다 작아야 한다. 따라서 구하는 집합

$$A = \left\{ a \mid \frac{1}{2} \leq a < 4 - 2\sqrt{3} \right\} \text{이다.}$$

30점

[문항 4] 제시문 (ㄱ)~(ㄹ)을 읽고 논제에 답하십시오. (110점)

(ㄱ)

[변량의 표준편차] n 개의 변량 b_1, b_2, \dots, b_n 의 평균을 m 이라고 할 때 표준편차 σ 는 다음과 같다.

$$\sigma = \sqrt{\frac{(b_1 - m)^2 + (b_2 - m)^2 + \dots + (b_n - m)^2}{n}}$$

(ㄴ)

$(k+1)$ 개의 변량 c, c_1, c_2, \dots, c_k 는 첫째 항이 c , 공차가 3, 항의 개수가 $(k+1)$ 개인 등차수열을 이룬다. (단, $k \geq 1$)

(ㄷ)

제시문 (ㄴ)의 변량 c, c_1, c_2, \dots, c_k 의 표준편차를 σ_k 라고 할 때 l 은 다음과 같다.

$$l = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{\sigma_k}{2n^2 - k^2}$$

(ㄹ)

[수열의 극한값의 대소 관계] 수열의 극한값에 대하여 다음이 성립한다.

두 수열 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 이 수렴하고 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha, \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \beta$ (단, α, β 는 실수) 일 때

1. 모든 자연수 n 에 대하여 $a_n \leq b_n$ 이면 $\alpha \leq \beta$
2. 수열 $\{c_n\}$ 이 모든 자연수 n 에 대하여 $a_n \leq c_n \leq b_n$ 이고 $\alpha = \beta$ 이면

$$\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \alpha$$

[논제] 제시문 (ㄷ)의 l 의 값을 구하고 그 근거를 논술하십시오. (110점)

[문항 4] 출제의도 및 해설, 평가기준

출제의도

- 가) 변량의 평균 및 표준편차를 구할 수 있는지 확인한다.
- 나) 등차수열의 합을 구할 수 있는지 확인한다.
- 다) 정적분의 뜻을 이해하고 이를 활용할 수 있는지를 확인한다.
- 라) 극한값의 대소 관계를 이용하여 값을 구할 수 있는지를 확인한다.

문항해설

- 등차 수열의 합을 이용하여 주어진 자료(변량)의 평균 및 표준편차를 구할 수 있는지를 평가한다.
- 극한값의 대소 관계와 정적분의 정의를 이용하여 주어진 극한값을 정적분으로 표현할 수 있는지를 평가한다.
- 정적분을 계산할 수 있는지를 평가한다.

평가기준

[문제] (110점)

<p>$(k+1)$개의 변량 c, c_1, c_2, \dots, c_k의 평균 m은 다음과 같다.</p> $m = \frac{c + (c+3) + \dots + (c+3k)}{k+1} = c + \frac{3}{2}k$ <p>그러므로 표준편차 σ_k는</p> $\begin{aligned} \sigma_k &= \sqrt{\frac{1}{k+1} \sum_{i=1}^{k+1} \left\{ (c+3i-3) - \left(c + \frac{3k}{2} \right) \right\}^2} = \sqrt{\frac{9}{k+1} \sum_{i=1}^{k+1} \left(i-1 - \frac{k}{2} \right)^2} \\ &= 3 \sqrt{\frac{1}{k+1} \sum_{i=1}^{k+1} \left((i-1)^2 - k(i-1) + \frac{k^2}{4} \right)} = 3 \sqrt{\frac{k(k+2)}{12}} \end{aligned}$ <p>이고 제시문 (ㄷ)의 l은</p> $l = \frac{\sqrt{3}}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=1}^n \frac{\sqrt{k(k+2)}}{2n^2 - k^2} \right)$	20점
<p>한편,</p> $\sum_{k=1}^n \frac{\sqrt{k(k+2)}}{2n^2 - k^2} \geq \sum_{k=1}^n \frac{\sqrt{k^2}}{2n^2 - k^2} = \sum_{k=1}^n \frac{\frac{k}{n}}{2 - \left(\frac{k}{n}\right)^2} \cdot \frac{1}{n}$ <p>이고</p>	20점
$\sum_{k=1}^n \frac{\sqrt{k(k+2)}}{2n^2 - k^2} \leq \sum_{k=1}^n \frac{\sqrt{(k+1)^2}}{2n^2 - k^2} = \sum_{k=1}^n \frac{\frac{k+1}{n}}{2 - \left(\frac{k}{n}\right)^2} \cdot \frac{1}{n} \leq \sum_{k=1}^n \frac{\frac{k}{n}}{2 - \left(\frac{k}{n}\right)^2} \cdot \frac{1}{n} + \sum_{k=1}^n \frac{1}{n^2}$ <p>이다.</p>	30점

정적분의 정의와 제시문 (ㄹ)의 1에 의해서 l 은 다음의 두 부등식을 만족한다.

$$l \geq \frac{\sqrt{3}}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=1}^n \frac{\frac{k}{n}}{2 - \left(\frac{k}{n}\right)^2} \cdot \frac{1}{n} \right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \int_0^1 \frac{x}{2-x^2} dx$$

그리고

$$l \leq \frac{\sqrt{3}}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\left(\sum_{k=1}^n \frac{\frac{k}{n}}{2 - \left(\frac{k}{n}\right)^2} \cdot \frac{1}{n} \right) + \frac{1}{n} \right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \int_0^1 \frac{x}{2-x^2} dx$$

30점

따라서 제시문 (ㄹ)의 2에 의해서 제시문 (ㄷ)의 l 은 다음과 같다.

$$l = \frac{\sqrt{3}}{2} \int_0^1 \frac{x}{2-x^2} dx = \frac{\sqrt{3}}{2} \left[-\frac{1}{2} \ln(2-x^2) \right]_0^1 = -\frac{\sqrt{3}}{4} \ln 2$$

10점