자연과학·공학계열, 간호학과(자연) 논술전형 문제

[문항 1] 제시문 (ㄱ)~(ㄷ)을 읽고 문제(논제 1, 논제 2)에 답하시오. (30점)

(ㄱ)

실수 α, β는 다음을 만족한다.

1. 모든 실수 x에 대해서 $\alpha x^2 - 2\alpha x - 2 < 0$이다.
2. $\log_{\frac{1}{2}}(2-\beta) > \log_{\frac{1}{2}}(2\beta - 1)$

(ㄴ)

실수 k에 대하여 함수 $f(x)$는 다음과 같다.

$$f(x) = 2x^2 - x + k$$

(ㄷ)

제시문 (ㄱ)의 실수 α, β와 제시문 (ㄴ)의 함수 $f(x)$에 대하여 α, β가 방정식 $f(x)=0$의 두 실근이 되기 위한 실수 k전체의 집합을 E라고 하자.

[논제 1] 제시문 (ㄱ)의 실수 α, β의 범위를 각각 구하고 그 근거를 논술하시오. (15점)

[논제 2] 제시문 (ㄷ)의 집합 E를 구하고 그 근거를 논술하시오. (15점)

[문항 1] 출제의도 및 해석, 평가기준

출제의도

본 문제는 이차방정식과 이차함수의 관계를 이해하고 이를 활용할 수 있는지를 평가하고자 한다.

[논제 1] 이차방정식과 이차함수의 관계 및 로그함수를 이해하고 이를 활용할 수 있는지를 평가하는 문제다.

[논제 2] 이차방정식과 이차함수의 관계를 활용하여 함수 $f(x)$에 대해서 $f(x)=0$의 근이 속해 있는 범위를 결정할 수 있는지를 평가하는 문제다.

문항해설

[논제 1] 이차방정식과 이차함수의 관계와 로그 함수를 활용하여 주어진 부등식을 만족하는 실수 α, β를 구할 수 있는지를 평가한다.

[논제 2] 이차방정식과 이차함수의 관계를 활용하여 제시문 (ㄴ)의 함수 $f(x)$에 대해서 $f(x)=0$의 두 근이 논제 1의 α, β가 되도록 하는 실수 k의 범위를 구할 수 있는지를 평가한다.

평가기준

[논제 1] (15점)

i) $\alpha x^2 - 2\alpha x - 2 < 0$의 최고차항의 계수 α가 $\alpha > 0$, $\alpha = 0$, $\alpha < 0$인 경우로 나누어서 생각한다. 1. $\alpha > 0$일 때, 함수 $f(x) = \alpha x^2 - 2\alpha x - 2$은 아래로 볼록인 포물선이므로 $f(x) > 0$인 값이 반드시 존재한다. 따라서 $\alpha \leq 0$이다. 2. $\alpha = 0$일 때, 주어진 부등식은 $-2 < 0$으로 성립하므로, $\alpha = 0$도 포함된다. 3. $\alpha < 0$일 때, 모든 실수 x에 대해서 $\alpha x^2 - 2\alpha x - 2 < 0$을 만족하려면 $D = (-2\alpha)^2 + 8\alpha = 4(\alpha^2 + 2\alpha) < 0$ 이어야 한다. 따라서 $-2 < \alpha < 0$이다. 1, 2, 3에 의해서, α의 범위는 $-2 < \alpha \leq 0$이다.	10점
ii) 로그의 진수 조건에 의해서 $2 - \beta > 0$, $2\beta \quad 1 > 0$, 즉 $\beta < 2$, $\beta > \frac{1}{2}$을 얻는다. 한편, 로그의 밑이 0과 1사이 이므로 $\log_{\frac{1}{2}}(2-\beta) > \log_{\frac{1}{2}}(2\beta - 1) \Leftrightarrow 2 - \beta < 2\beta - 1 \Leftrightarrow 1 < \beta$ 이다. 따라서 β의 범위는 $1 < \beta < 2$이다.	5점

[논제 2] (15점)

$f(x)=2x^2-x+k$로 두면, 두 근 α, β의 범위가 $-2<\alpha\le 0$, $1<\beta<2$일 필요충분조건은 $f(-2)>0$, $f(0)\le 0$, $f(1)<0$, $f(2)>0$이다.	5점
즉, $f(-2)=8+2+k=10+k>0 \Leftrightarrow k>-10$, $f(0)=k\le 0$, $f(1)=2-1+k=1+k<0 \Leftrightarrow k<-1$, $f(2)=8-2+k=6+k>0 \Leftrightarrow k>-6$ 이다.	5점
따라서 네 부등식을 동시에 만족하는 k의 범위는 $-6<k<-1$이다.	5점

[문항 2] 제시문 (ㄱ)~(ㄷ)을 읽고 문제(논제 1, 논제 2)에 답하시오. (30점)

(ㄱ)

성심체육관 천장에는 10개의 전구가 있다. 각 전구마다 스위치가 있어서 스위치를 누르면 전구가 켜지고 다시 누르면 꺼진다.

(ㄴ)

어느 날 성심체육관의 모든 전구가 꺼져 있는 상태에서 태구가 임의의 서로 다른 3개의 스위치를 한 번씩 누르고 나갔다. 잠시 후 채윤이도 체육관에 들러 임의의 서로 다른 3개의 스위치를 한 번씩 누르고 나갔다. 두 학생이 체육관을 다녀간 후 켜져 있는 전구의 개수를 확률변수 X라고 하자.

(ㄷ)

[이산확률변수의 기댓값(평균)]

이산확률변수 X의 확률질량함수가 $\mathrm{P}(X=x_i)=p_i\,(i=1, 2, 3, \cdots, n)$일 때, 이산확률변수 X의 기댓값(평균) $\mathrm{E}(X)$는 다음과 같다.

$$\mathrm{E}(X)=x_1p_1+x_2p_2+\cdots+x_np_n=\sum_{i=1}^{n}x_ip_i$$

[논제 1] 제시문 (ㄴ)의 확률변수 X에 대하여 확률 $\mathrm{P}(X=2)$를 구하고 그 근거를 논술하시오. (10점)

[논제 2] 제시문 (ㄴ)의 확률변수 X에 대하여 기댓값(평균) $\mathrm{E}(X)$를 구하고 그 근거를 논술하시오. (20점)

[문항 2] 출제의도 및 해설, 평가기준

출제의도

본 문제는 주어진 상황에서 경우의 수의 의미를 이해하고 확률을 구할 수 있는지를 평가하고자 한다. 또한 이산확률변수의 확률분포와 기댓값를 이해하고 이를 활용할 수 있는지를 평가하고자 한다.

[논제 1] 주어진 상황에서 경우의 수의 의미를 이해하고 조합을 활용하여 확률을 구할 수 있는지를 평가하는 문제다.

[논제 2] 조합을 활용하여 이산확률변수의 확률분포를 구할 수 있는지를 평가하는 문제다. 또한 확률분포를 이용하여 기댓값을 구할 수 있는지를 평가하는 문제다.

문항해설

[논제 1] 경우의 수의 성질을 이해하고 이를 이용하여 주어진 상황에서 확률을 구할 수 있는지를 평가한다. 또한 경우의 수를 조합을 이용하여 구할 수 있는지를 평가한다.

[논제 2] 이산확률변수의 확률분포를 구할 수 있는지를 평가한다. 또한 확률분포를 이용하여 기댓값을 구할 수 있는지를 평가한다.

평가기준

[논제 1] (10점)

태구가 3개의 스위치를 누른 후 채윤이는 켜진 전구 3개와 꺼진 전구 7개인 상태에서 임의로 3개의 스위치를 선택한다. 따라서 2개의 전구가 켜지기 위해서는 채윤이가 켜진 전구 3개 중 2개와 꺼진 전구 7개 중 1개를 택하여야만 한다.	5점
이때 그 확률 $$\mathrm{P}(X=2)=\frac{{}_3\mathrm{C}_2\times{}_7\mathrm{C}_1}{{}_{10}\mathrm{C}_3}=\frac{21}{120}=\frac{7}{40}$$ 이다.	5점

[논제 2] (20점)

채윤이가 임의로 선택한 3개의 스위치에서 켜진 전구의 스위치의 개수가 3, 2, 1, 0일 때 최종적으로 켜진 전구의 개수는 각각 0, 2, 4, 6 이다. 즉 확률변수 X가 가질 수 있는 값은 0, 2, 4, 6 이다.	4점
이때 그 확률은 각각 $\mathrm{P}(X=0)=\frac{{}_3\mathrm{C}_3\times{}_7\mathrm{C}_0}{{}_{10}\mathrm{C}_3}=\frac{1}{120}$, $\mathrm{P}(X=2)=\frac{{}_3\mathrm{C}_2\times{}_7\mathrm{C}_1}{{}_{10}\mathrm{C}_3}=\frac{21}{120}=\frac{7}{40}$, $\mathrm{P}(X=4)=\frac{{}_3\mathrm{C}_1\times{}_7\mathrm{C}_2}{{}_{10}\mathrm{C}_3}=\frac{63}{120}=\frac{21}{40}$, $\mathrm{P}(X=6)=\frac{{}_3\mathrm{C}_0\times{}_7\mathrm{C}_3}{{}_{10}\mathrm{C}_3}=\frac{35}{120}=\frac{7}{24}$ 이다. 따라서 확률변수 X의 확률분포는 다음과 같다.	12점
확률변수 X의 기댓값은 $\mathrm{E}(X)=\frac{1}{120}(0\times1+2\times21+4\times63+6\times35)=\frac{21}{5}$ 이다.	4점

확률분포표:

x	0	2	4	6
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{120}$	$\frac{21}{120}$	$\frac{63}{120}$	$\frac{35}{120}$

[문항 3] 제시문 (ㄱ)~(ㄴ)을 읽고 문제(논제 1, 논제 2)에 답하시오. (40점)

(ㄱ)

좌표평면 위의 원 C와 세 점 P, Q, R는 다음을 만족한다.

1. 원 C의 중심은 $(0, c)$이고 반지름은 $4c^2+\frac{1}{c}$이다. (단, $c>0$)

2. 점 P와 Q는 직선 $y=\sqrt{3}x$에 대하여 대칭이다.

3. $\overrightarrow{\mathrm{PO}}+\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\overrightarrow{\mathrm{OR}}$ (단, O는 원점)

(ㄴ)

제시문 (ㄱ)의 원 C와 점 P, R에 대하여 점 P가 원 C 위를 시계방향으로 한 바퀴 돌 때, 점 R의 이동거리를 l이라고 하자.

[논제 1] 제시문 (ㄴ)의 l을 구하고 그 근거를 논술하시오. (30점)

[논제 2] $1 \le c \le 3$인 실수 c에 대하여, 제시문 (ㄴ)의 l의 최솟값을 구하고 그 근거를 논술하시오. (10점)

[문항 3] 출제의도 및 해설, 평가기준

출제의도

가) 대칭이동의 의미를 이해하고 구할 수 있는지 확인한다.
나) 벡터의 덧셈과 뺄셈을 할 수 있는지 확인한다.
다) 좌표평면에서 원과 직선의 위치관계를 이해하고 이를 활용 할 수 있는지 확인한다.
라) 두 점 사이의 거리를 활용할 수 있는지 확인한다.
마) 도함수의 성질을 이용하여 함수의 증가와 감소를 판별할 수 있는지를 확인한다.
바) 함수의 최대, 최소를 이해하고 이를 구할 수 있는지를 확인한다.

문항해설

- 주어진 조건으로부터 점 $\mathrm{R}(a,b)$의 좌표를 구할 수 있는지를 평가한다.
- 조건을 만족하는 a, b사이의 관계식을 구할 수 있는지를 평가한다.
- 점과 직선사이의 거리공식을 이용하여 선분의 좌표가 갖는 범위를 구할 수 있는지를 평가한다.
- 선분의 길이를 구할 수 있는지를 평가한다.
- 도함수를 활용하여 함수의 증가, 감소를 판별하고 함수의 최솟값을 구할 수 있는지를 평가한다.

평가기준

[논제 1] (30점)

<table>
<tr>
<td>

좌표평면 위의 세 점 P, Q, R 의 좌표를 각각 (x,y), (x',y'), (a,b)라고 하자. 점 P와 Q가 직선 $y=\sqrt{3}x$에 대하여 대칭이므로 실수 x, y, x', y'는 다음의 두 식을 만족한다.

$$\frac{y'-y}{x'-x}=-\frac{1}{\sqrt{3}}, \quad \frac{y+y'}{2}=\sqrt{3}\left(\frac{x+x'}{2}\right)$$

그러므로 점 Q의 좌표를 x, y로 나타내면 다음과 같다.

$$\mathrm{Q}=(x',y')=\left(-\frac{1}{2}x+\frac{\sqrt{3}}{2}y,\ \frac{\sqrt{3}}{2}x+\frac{1}{2}y\right)$$

$\overrightarrow{\mathrm{PO}}+\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=\overrightarrow{\mathrm{OR}}$ 로 부터, 점 R의 좌표는 다음과 같다.

$$\mathrm{R}=(a,b)=\left(-\frac{3}{2}x+\frac{\sqrt{3}}{2}y,\ \frac{\sqrt{3}}{2}x-\frac{1}{2}y\right)$$

</td>
<td>10점</td>
</tr>
<tr>
<td>

한편, $\frac{\sqrt{3}}{2}x-\frac{1}{2}y=-\frac{1}{\sqrt{3}}\left(-\frac{3}{2}x+\frac{\sqrt{3}}{2}y\right)$이므로 실수 a, b는 다음을 만족한다.

$$b=-\frac{1}{\sqrt{3}}a$$

</td>
<td>5점</td>
</tr>
</table>

점 P가 원 C 위에 있으므로, 원 C와 직선 $-\frac{3}{2}x+\frac{\sqrt{3}}{2}y=a$는 교점을 가져야 한다. 점과 직선사이의 거리 공식으로부터 실수 a의 범위는 다음과 같다. $$\frac{\left\vert \frac{\sqrt{3}}{2}c-a \right\vert}{\sqrt{3}} \le 4c^2+\frac{1}{c} \quad \Rightarrow \quad \frac{\sqrt{3}}{2}c-\sqrt{3}\left(4c^2+\frac{1}{c}\right) \le a \le \frac{\sqrt{3}}{2}c+\sqrt{3}\left(4c^2+\frac{1}{c}\right)$$	10점
점 P가 원 C 위를 시계방향으로 한 바퀴 돌 때, 점 R은 다음의 선분을 한번 왕복한다. $$y=-\frac{1}{\sqrt{3}}x,\quad \left(\frac{\sqrt{3}}{2}c-\sqrt{3}\left(4c^2+\frac{1}{c}\right) \le x \le \frac{\sqrt{3}}{2}c+\sqrt{3}\left(4c^2+\frac{1}{c}\right)\right)$$ 그러므로 제시문 (ㄹ)의 l은 다음과 같다. $$l=2\times\frac{2}{\sqrt{3}}\times 2\sqrt{3}\left(4c^2+\frac{1}{c}\right)=8\left(4c^2+\frac{1}{c}\right)$$	5점

[논제 2] (10점)

$x>0$인 실수에 대하여 함수 $g(x)=8\left(4x^2+\frac{1}{x}\right)$라고 하자. $g'(x)=8\left(8x-\frac{1}{x^2}\right)$ 이므로, $x>\frac{1}{2}$인 모든 x에 대하여 $g'(x)>0$이다. 그러므로 함수 $g(x)$는 구간 $[1,3]$에서 증가한다.	5점
따라서 제시문 (ㄹ)의 상수 l은 $c=1$에서 최솟값 40을 갖는다.	5점