자연·공학계열 및 간호(자연)

※ 모의논술전형 문항은 출제경향의 참고용으로 실제 논술전형과 난이도, 출제범위 등에서 다를 수 있습니다. 반드시, 전년도 논술전형 문항을 참고하여 2019학년도 가톨릭대학교 논술전형을 준비해주시기 바랍니다. 전년도 논술전형 가이드북은 본교 입학 홈페이지를 통해 다운로드 받을 수 있습니다.

[문항 1] 제시문 (ㄱ)~(ㄷ)을 읽고 문제(논제 1, 논제 2)에 답하시오. (30점)

ㄱ 상수 k에 대하여 다음 함수 $f(x)$는 $x=6$에서 최솟값을 가진다.

$$f(x)=\int_0^x (t^3-kt^2-t+k)\,dt$$

ㄴ **[적분과 미분의 관계]** 함수 $g(x)$가 구간 $[a,\ b]$에서 연속일 때 다음이 성립한다.

$$\frac{d}{dx}\int_a^x g(t)\,dt = g(x)\ (\text{단, } a<x<b)$$

ㄷ 구간 $[0, 6]$에서 제시문 (ㄱ)의 함수 $f(x)$의 최댓값을 M이라고 하자.

논제 1. 제시문 (ㄱ)의 상수 k의 값을 구하고 그 근거를 논술하시오. (10점)

논제 2. 제시문 (ㄷ)의 M의 값을 구하고 그 근거를 논술하시오. (20점)

[문항 2] 제시문 (ㄱ)~(ㄷ)을 읽고 문제(논제 1, 논제 2)에 답하시오. (30점)

ㄱ 검은 공과 흰 공을 합하여 16개가 들어있는 주머니가 있다.

ㄴ 제시문 (ㄱ)의 주머니에서 임의로 두 개의 공을 꺼낼 때, 서로 다른 색의 공이 나오는 사건을 A라고 하자.

ㄷ 제시문 (ㄱ)의 주머니에 들어있는 검은 공의 개수를 n이라고 하자. 이 주머니에서 임의로 두 개의 공을 꺼낼 때, 서로 같은 색의 공이 나올 사건의 확률을 p_n이라고 하자.

논제 1. 제시문 (ㄴ)의 사건 A의 확률이 $\frac{1}{2}$일 때, 검은 공의 개수를 구하고 그 근거를 논술하시오. (20점)

논제 2. 제시문 (ㄷ)의 p_n에 대하여 p_n이 최소가 되는 n의 값을 구하고 그 근거를 논술하시오. (10점)

[문항 3] 제시문 (ㄱ)~(ㄹ)을 읽고 문제(논제 1, 논제 2)에 답하시오. (40점)

ㄱ 좌표평면 위를 움직이는 점 $\mathrm{P}(x,y)$의 시각 t에서의 위치가 $x=e^t\cos t$, $y=e^t\sin t$일 때, 점 P가 시각 0에서 시각 t까지 움직인 거리를 $s(t)$라고 하자.

ㄴ 제시문 (ㄱ)의 함수 $s(t)$에 대하여 수열 $\{a_n\}$은 다음과 같다. (단, $n=1, 2, 3, \cdots$)

$$a_n = \frac{1}{s(n\ln 2) - s(n\ln 2 - \ln 2)}$$

ㄷ 제시문 (ㄴ)의 수열 $\{a_n\}$에 대하여, 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$의 합을 A라고 하자.

$$A = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

ㄹ **[평면 위의 점의 이동거리]** 좌표평면 위를 움직이는 점 $\mathrm{P}(x,y)$의 시각 t에서의 위치가 $x=f(t)$, $y=g(t)$로 나타내어질 때, 점 P가 시각 a에서 시각 b까지 움직인 거리 s는 다음과 같다.

$$s = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt$$

논제 1. 제시문 (ㄱ)의 함수 $s(t)$를 구하고 그 근거를 논술하시오. (25점)

논제 2. 제시문 (ㄷ)의 A의 값을 구하고 그 근거를 논술하시오. (15점)

출제원칙

1 출제 방침

가. 고교 교과서에 기반한 고교 과정 내의 문제를 출제한다.

나. 제시문에 대한 독해력과 분석력, 제시문을 바탕으로 제시된 문제를 해결하는 사고력과 적용하는 능력, 생각하는 바를 논리적으로 전개하는 논술 능력을 측정하는 문제를 출제한다.

2 출제 유형

가. 지문 제시형 문제를 출제한다.

나. 제시문은 고교 교과서(“수학 I”, “수학 II”, “미적분 I”, “미적분 II”, “확률과 통계”, “기하와 벡터”)를 참조하여 구성한다.

다. 수리논술(이과, 간호-자연) 문제는 지문에 대한 정확한 독해력, 내용의 분석 능력, 제시된 지식을 이용하여 문제를 해결하는 능력 등을 측정하는 문제를 출제한다. 점수는 100점이며 변별력을 위해 3개의 문항으로 구성하되, 각 문항은 몇 개의 소 논제로 구성한다.

라. 약 100~110분 이내에 작성하도록 한다.

3 출제 의도

가. **[문항 1]** 다항함수의 적분, 미분을 이용한 최댓값 혹은 최솟값을 구하는 방법을 이해하고 구체적인 상황에서 최댓값 혹은 최솟값을 구할 수 있는 능력을 평가할 수 있도록 하였다.

[문항 2] 경우의 수와 확률의 개념을 알고 이를 구할 수 있는지를 평가할 수 있도록 하였다. 또한 여사건의 확률을 구할 수 있는 능력을 평가할 수 있도록 하였다.

[문항 3] 초월함수의 미분과 적분, 지수함수와 로그함수의 관계를 이해하고 이를 이용하여 계산할 수 있는지를 평가할 수 있도록 하였다. 또한, 등비수열의 합을 이용하여 급수의 합을 구할 수 있는지 평가할 수 있도록 하였다.

나. 궁극적으로 고등학교 수학 문제 제시를 통해 대학 진학 후 이과과목을 수강할 수 있을 정도의 기초적인 능력을 갖추고 있는지를 측정하고자 하였다.

채점기준

1 기본사항

가. 각 논제를 각각 가중치를 가지고 채점하되 총점으로 환산하여 총괄 평가한다. 수리논술에서는 배당된 점수 범위 내에서 등급이 아닌 점수로 표기하여 합산한다.

나. 논술 답안에 수험생의 신원을 알릴만한 요소가 있을 때는 다음과 같이 처리한다.

① 이름이 본문 내용과 별도로 표기된 경우 : 내용, 형식 모두 0점으로 채점

② 이름이 본문 중에 자연스럽게 노출된 경우 : 형식 부분에서 5점 감점

③ 제목이 표기된 경우 : 형식 부분에서 5점 감점

④ 기타 의도적으로 수험생의 신원을 알리는 기호로 판단되는 요소가 있는 경우 : 사안의 경중에 따라 형식 부분에서 5점 이상 감점

2 세부 사항

가. 문제의 의도에서 완전히 이탈했거나 각 논제와 전혀 다른 내용을 서술한 경우는 0점으로 채점한다.

나. 각 문항 별 채점기준은 다음과 같다.

예시답안

[문항 1] (30점)

논제 1(10점)

$f(x)$는 4차 다항함수이고 $x=6$일 때 최솟값을 가지므로 $f(x)$는 $x=6$일 때 극솟값을 가진다. 따라서 $f'(6)=0$이다.	5점
그런데 $f'(x)=x^3-kx^2-x+k$이므로 $f'(6)=6^3-6^2k-6+k=0$이다. 따라서 $k=6$이다.	5점

논제 2(20점)

$f'(x)=x^3-6x^2-x+6=(x+1)(x-1)(x-6)$이므로

구간 [0, 6]에서 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$	6
$f'(x)$	$+$	$+$	0	$-$	0
$f(x)$	0	$\nearrow$	$f(1)$	$\searrow$	$f(6)$

따라서 구간 [0, 6]에서 $f(x)$의 최댓값은 $f(1)$이다.

10점

그런데 $f(1)=\int_0^1 (t^3-6t^2-t+6)\,dt=\frac{1}{4}-2-\frac{1}{2}+6=\frac{15}{4}$이므로 $M=\frac{15}{4}$이다.

10점

예시답안

[문항 2] (30점)

논제 1(20점)

검은 공의 개수를 n, 흰 공의 개수는 $16-n$이다. 주머니에서 임의로 두 개의 공을 꺼낼 때, 서로 다른 색의 공이 나올 확률은 $\dfrac{{}_{n}\mathrm{C}_1 \times {}_{16-n}\mathrm{C}_1}{{}_{16}\mathrm{C}_2} = \dfrac{n\times(16-n)}{8\times 15} = \dfrac{1}{2}$	10점
위 식을 정리하면 $n^2-16n+60=0$, $(n-6)(n-10)=0$	5점
따라서 검은 공의 개수는 6 또는 10이다.	5점

논제 2(10점)

같은 색이 나오는 사건은 서로 다른 색의 공이 나오는 사건의 여사건이므로 논제 1에서 이용하여 서로 같은 색이 나올 확률 p_n은 $p_n = 1-\dfrac{{}_{n}\mathrm{C}_1 \times {}_{16-n}\mathrm{C}_1}{{}_{16}\mathrm{C}_2} = 1-\dfrac{n\times(16-n)}{8\times 15} = \dfrac{(n-8)^2+56}{120}$ 이다.	5점
따라서 $n=8$, 즉 검은 공의 개수가 8개 일 때 최소가 된다.	5점

예시답안

[문항 3] (40점)

논제 1(25점)

$\dfrac{dx}{dt} = e^t\cos t - e^t\sin t$이고 $\dfrac{dy}{dt} = e^t\sin t + e^t\cos t$이므로 $\left(\dfrac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\dfrac{dy}{dt}\right)^2 = 2e^{2t}$가 된다.	15점
따라서 제시문 (ㄹ)에 의해 $s(t)$는 $s(t) = \sqrt{2}\int_0^t e^u du = \sqrt{2}(e^t - 1)$이다.	10점

논제 2(15점)

$s(n\ln 2) = \sqrt{2}(e^{n\ln 2} - 1) = \sqrt{2}(2^n - 1)$이므로	5점
$s(n\ln 2) - s(n\ln 2 - \ln 2) = \sqrt{2}(2^n - 2^{n-1}) = \sqrt{2}\,2^{n-1}$이다. 즉, $a_n = \dfrac{1}{\sqrt{2}}2^{-n+1}$이다.	5점
따라서, $A = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n+1} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{2}} = \sqrt{2}$ 이다.	5점

학생 답안 첨삭 예시

[문항 1]

가톨릭대학교 THE CATHOLIC UNIVERSITY OF KOREA

2019학년도 가톨릭대학교 모의논술 (자연과학·공학계열, 간호자연)

[문항 1]

논제 1. $f(x)=\int_0^x (t^3-kt^2-t+k)\,dt$

$f(x)$는 연속이므로 조건 (ㄴ)에 따라 $f'(x)=x^3-kx^2-x+k=(x-k)(x^2-1)$

이때 $f(x)$는 $x=6$에서 최솟값을 가지므로

10

$f'(6)=(6-k)(6^2-1)=0$ $6-k=0.$ $k=6$

따라서 상수 $k=6$ 이다.

논제 2. $f'(x)=(x-6)(x-1)(x+1)$ 이고

$f(x)=\int_0^x (t^3-kt^2-t+k)\,dt$ 이므로

20

$f(x)=\left[\frac{x^4}{4}-2x^3-\frac{x^2}{2}+6x\right]_0^x=\frac{x^4}{4}-2x^3-\frac{x^2}{2}+6x$

~~$f(x)$의 증감은 다음과 같다.~~

x		-1		1		6	
$f(x)$	↘	$-\frac{17}{4}$	↗	$\frac{15}{4}$	↘		↗
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

불필요합니다!
(감점은 없음)

이 부분은 불필요하고 $x=0$ 부터 시작해야 됩니다!

$f(x)$는 $x=1$에서 극댓값을 갖고 구간 $(-1,\ 1)$에서 증가, 구간 $(1.\ 6)$에서 감소하므로
구간 $[0,\ 6]$에서 $f(x)$의 최댓값은 $\frac{15}{4}$ 이다.

(감점은 없음)

학생 답안 첨삭 예시

[문항 2]

30

【문항 2】

논제 1

검은 공의 개수를 x개 라고하면, 흰 공의 개수는 $16-x$개 이다

전체공 16개 중에서 2개를 뽑는 경우의 수는 ${}_{16}C_2 = 120$

검은공 중 1개다 흰공중1개를 뽑는 경우의 수는 ${}_{x}C_1 \times {}_{16-x}C_1$ 이다

$P(A)$는 $\frac{x(16-x)}{120}$ 이다

$P(A)=\frac{1}{2}$ 이므로

$\frac{x(16-x)}{120}=\frac{1}{2}$

$-x^2+16x=60$

$x^2-16x+60=0$

$(x-6)(x-10)=0$

$x=6$ 또는 $x=10$이다

검은공은 6개또는 10개이다

논제 2

검은공의 개수가 n개라고 했으므로 흰공의 개수는 $16-n$개 이다

전체 공 16개중 2개를 뽑는 경우의 수는 ${}_{16}C_2=120$ 이다

검은공 n개중 2개를 뽑는 경우의 수는 ${}_{n}C_2=\frac{n(n-1)}{2}$ 이다

흰공 $(16-n)$개 중 2개를 뽑는 경우의 수는 ${}_{16-n}C_2=\frac{(16-n)(15-n)}{2}$ 이다

검은공만 뽑을 확률을 $P(B)$, 흰공만 뽑을 확률을 $P(C)$라고 하면

$P(B)=\frac{\frac{n(n-1)}{2}}{120}=\frac{n(n-1)}{240}$

$P(C)=\frac{\frac{(16-n)(15-n)}{2}}{120}=\frac{(16-n)(15-n)}{240}$

$P_n=P(B)+P(C)$

$=\frac{n(n-1)}{240}+\frac{(16-n)(15-n)}{240}$

$=\frac{n^2-n+n^2-31n+240}{240}$

$=\frac{2n^2-32n+240}{240}$

$=\frac{n^2-16n+120}{120}$

P_n이 최소가 되려면 $\frac{n^2-16n+120}{120}$이 최소가 되어야 한다

$f(n)=n^2-16n+120$ 이라고 하면,

$f(n)=(n-8)^2+56$

$f(n)$는 대칭축이 $n=8$이고, $n=8$일때 최솟값 56을 가진다

$\therefore P_n$은 $n=8$일때, 최솟값 $\frac{7}{15}$을 가진다 $(P_n>0, n>0)$

좋은 답안 입니다.

학생 답안 첨삭 예시

[문항 3]

【문항 3】

논제 1

$$\frac{dx}{dt} = e^t\cos t + (-e^t\sin t)$$

$$\frac{dy}{dt} = e^t\sin t + e^t\cos t$$

$$S(t) = \int_0^t \sqrt{(e^t\cos t - e^t\sin t)^2 + (e^t\sin t + e^t\cos t)^2}\,dt$$

$$\begin{aligned}(e^t\cos t - e^t\sin t)^2 &= (e^t\cos t)^2 - 2e^{2t}\cos t\sin t + (e^t\sin t)^2 \\ &= e^{2t}(\cos^2 t + \sin^2 t) - 2e^{2t}\cos t\sin t \\ &= e^{2t} - 2e^{2t}\cos t\sin t\end{aligned}$$

$$(e^t\sin t + e^t\cos t)^2 = e^{2t} + 2e^{2t}\cos t\sin t$$

$$\therefore\ (e^t\cos t - e^t\sin t)^2 + (e^t\sin t + e^t\cos t)^2 = 2e^{2t}$$

$$\begin{aligned}S(t) &= \int_0^t \sqrt{2}e^t\,dt \\ &= \left[\sqrt{2}e^t\right]_0^t = \sqrt{2}e^t - \sqrt{2}\end{aligned}$$

25

논제 2

$$S(t) = \sqrt{2}e^t - \sqrt{2} \qquad S(n\ln 2) = \sqrt{2}e^{n\ln 2} - \sqrt{2} = 2^{n+\frac{1}{2}} - \sqrt{2}$$

$$\begin{aligned}S(n\ln 2 - \ln 2) &= S(\ln 2^{n-1}) \\ &= \sqrt{2}e^{(n-1)\ln 2} - \sqrt{2} = e^{n-\frac{1}{2}} - \sqrt{2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&S(n\ln 2) - S(n\ln 2 - \ln 2) \\ &= 2^{n+\frac{1}{2}} - \sqrt{2} - 2^{n-\frac{1}{2}} + \sqrt{2} \\ &= 2^{n+\frac{1}{2}} - 2^{n-\frac{1}{2}}\end{aligned}$$

$$a_n = \frac{1}{2^{n+\frac{1}{2}} - 2^{n-\frac{1}{2}}}$$

$$\begin{aligned}A = \sum_{n=1}^{\infty} a_n &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n+\frac{1}{2}} - 2^{n-\frac{1}{2}}} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2}\,2^n - \frac{2^n}{\sqrt{2}}}\end{aligned}$$

$$a_1 = \frac{1}{2\sqrt{2} - \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$a_2 = \frac{1}{4\sqrt{2} - 2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

$$a_3 = \frac{1}{8\sqrt{2} - 4\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{8}$$

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} a_n &= a_1 + a_2 + a_3 + \cdots \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{8} + \cdots\end{aligned}$$

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{8} + \cdots\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$$

15