3. 자연과학·공학계열, 간호학과(자연) 논술전형 문제

문항 1

제시문 (ㄱ)~(ㄷ)을 읽고 문제(논제 1, 논제 2)에 답하시오. (30점)

(ㄱ)

똑같은 공 20개와 서로 다른 네 상자 A_1, A_2, A_3, A_4가 있다. 철수와 영희는 다음과 같은 방법으로 네 상자에 공을 넣으려고 한다.

철수의 방법 : 20개 공의 전부를 네 상자에 넣는데, A_k상자에는 k보다 많은 수의 공을 넣으려고 한다. (단, $k=1, 2, 3, 4$)

영희의 방법 : 네 상자 A_1, A_2, A_3, A_4에 20개 공의 전부 또는 일부를 넣으려고 한다. (단, 공을 하나도 넣지 않을 수도 있다.)

(ㄴ)

[조합의 수] 서로 다른 n개의 원소 중에서 순서를 생각하지 않고 r개를 택하는 조합의 수는 다음과 같다.

$$_{n}C_{r} = \frac{n!}{(n-r)!\,r!} \qquad (0 \le r \le n)$$

(ㄷ)

[중복조합의 수] 서로 다른 n개의 원소 중에서 중복을 허용하여 r개를 택하는 조합을 중복조합이라 하고, 이 중복조합의 수는 다음과 같다.

$$_{n}H_{r} = {}_{n+r-1}C_{r}$$

[논제 1] (15점) 제시문 (ㄱ)의 철수의 방법으로 상자에 공을 넣을 수 있는 경우의 수를 구하고 그 근거를 논술하시오.

[논제 2] (15점) 제시문 (ㄱ)의 영희의 방법으로 상자에 공을 넣을 수 있는 경우의 수를 2018로 나눈 나머지를 구하고 그 근거를 논술하시오.

문항 1

출제의도 및 평가기준

01. 출제의도

본 문제는 중복조합의 의미를 이해하고 이를 활용할 수 있는지를 평가하고자 한다.

[논제 1] 각 상자에 넣는 공의 개수에 제한 조건이 있을 때 경우의 수를 구할 수 있는지를 평가하는 문제다.

[논제 2] 전체 공 중 일부만 상자에 넣는 조건이 있을 때 경우의 수를 구할 수 있는지를 평가하는 문제다.

02. 평가기준

[논제 1] (15점)

A_k 상자에 최소한 $k+1$개 이상의 공을 넣어야 하므로 구하는 경우의 수는 네 상자 A_1, A_2, A_3, A_4에 각각 2, 3, 4, 5개 총 14개의 공을 미리 넣고 나머지 6개의 공을 서로 다른 4개의 상자에 넣는 방법의 수와 같다.	10점
따라서 구하는 경우의 수는 서로 다른 4개의 원소 중에서 중복을 허용하여 6개를 택하는 중복조합의 수이다.	5점

[논제 2] (15점)

네 상자 A_1, A_2, A_3, A_4에 넣은 공의 수를 r이라 하고 나머지 $20-r$개의 공을 가상의 또 다른 상자에 넣는다고 하면 구하는 경우의 수는 똑같은 공 20개를 서로 다른 5개의 상자에 넣는 방법의 수와 같다.	10점
따라서 구하는 경우의 수는 서로 다른 5개의 원소 중에서 중복을 허용하여 20개를 택하는 중복조합의 수다. 즉 ${}_5\mathrm{H}_{20} = {}_{24}\mathrm{C}_{20} = 10{,}626$이다. 그러므로 구하는 나머지는 536이다.	5점

문항 2

제시문 (ㄱ)~(ㄹ)을 읽고 문제(논제 1, 논제 2)에 답하시오. (30점)

(ㄱ)

[연속확률변수와 확률밀도함수] 키, 길이, 무게, 온도 등과 같이 어떤 구간에 속하는 모든 실수의 값을 가지는 확률변수를 연속확률변수라 한다. 일반적으로 $\alpha \le x \le \beta$의 모든 실수의 값을 가지는 연속확률변수 X에 대하여 다음 성질을 만족하는 함수 $f(x)$가 존재한다.

1. $f(x) \ge 0$
2. 함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축 및 두 직선 $x=\alpha,\ x=\beta$로 둘러싸인 도형의 넓이는 1이다.
3. 확률 $\mathrm{P}(a \le X \le b)$는 함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축 및 두 직선 $x=a,\ x=b$로 둘러싸인 도형의 넓이다. (단, $\alpha \le a \le b \le \beta$)

이 때 함수 $f(x)$를 연속확률변수 X의 확률밀도함수라 하며, X는 확률밀도함수가 $f(x)$인 확률분포를 따른다고 한다.

(ㄴ)

연속확률변수 X의 확률밀도함수가

$$f(x)=kx^3 \quad (1 \le x \le 2)$$

이고, $Y=X^2$이라고 하자.

(ㄷ)

연속함수 $g(y)$는 제시문 (ㄴ)의 연속확률변수 Y와 $1 \le a \le b \le 4$인 임의의 실수 $a,\ b$에 대하여 다음을 만족한다.

$$\mathrm{P}(a \le Y \le b)=\int_a^b g(y)dy$$

(ㄹ)

[적분과 미분의 관계] 함수 $f(t)$가 구간 $[a,\ b]$에서 연속일 때 다음이 성립한다.

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt=f(x) \ \text{(단, } a<x<b\text{)}$$

[논제 1] (15점) 제시문 (ㄴ)의 상수 k의 값과 제시문 (ㄴ)의 연속확률변수 Y에 대하여 확률 $\mathrm{P}(1 \le Y \le 2)$를 각각 구하고 그 근거를 논술하시오.

[논제 2] (15점) 제시문 (ㄷ)의 연속함수 $g(y)$에 대하여 $g(3)$의 값을 구하고 그 근거를 논술하시오.

문항 2

출제의도 및 평가기준

01. 출제의도

본 문제는 연속확률변수와 확률밀도함수의 의미를 이해하고 확률밀도함수의 그래프와 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이로 확률을 구할 수 있는지를 평가하고자 한다. 또한 적분과 미분의 관계를 이해하고 이를 활용할 수 있는지를 평가하고자 한다.

[논제 1] 확률밀도함수의 의미를 이해하고 주어진 함수가 확률밀도함수가 되기 위한 조건을 활용할 수 있는지를 평가하는 문제다. 또한 연속확률변수의 확률을 확률밀도함수의 그래프와 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이로 구할 수 있는지를 평가하는 문제다.

[논제 2] 연속확률변수의 확률을 확률밀도함수를 이용하여 구할 수 있는지를 평가하는 문제다. 또한 넓이로 주어지는 확률을 정적분을 이용하여 구할 수 있는지를 평가하고자 한다. 또한 적분과 미분의 관계를 이해하고 이를 통해 함수 값을 구할 수 있는지를 평가하는 문제다.

02. 평가기준

[논제 1] (15점)

$f(x)=kx^3 \quad (1 \le x \le 2)$가 확률밀도함수이므로 제시문 (ㄱ)의 성질로부터 함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축 및 두 직선 $x=1,\ \ x=2$로 둘러싸인 도형의 넓이가 1이다. 이 도형의 넓이는 정적분 $\int_1^2 kx^3dx$와 같으므로 $$\int_1^2 kx^3dx=\frac{k}{4}(2^4-1^4)=\frac{15}{4}k=1$$ 이다. 따라서 $k=\frac{4}{15}$이다.	5점
한편 $Y=X^2$이므로 $\mathrm{P}(1 \le Y \le 2)=\mathrm{P}(1 \le X^2 \le 2)=\mathrm{P}(1 \le X \le \sqrt{2})$이고, 확률 $\mathrm{P}(1 \le X \le \sqrt{2})$은 함수 $y=\frac{4}{15}x^3$의 그래프와 x축 및 두 직선 $x=1,\ \ x=\sqrt{2}$와 둘러싸인 도형의 넓이이므로 $\int_1^{\sqrt{2}}\frac{4}{15}x^3dx=\frac{1}{5}$이다. 따라서 $$\mathrm{P}(1 \le Y \le 2)=\mathrm{P}(1 \le X^2 \le 2)=\mathrm{P}(1 \le X \le \sqrt{2})=\int_1^{\sqrt{2}}\frac{4}{15}x^3dx=\frac{1}{5}$$ 이다.	10점

[논제 2] (15점)

제시문 (ㄷ)에 의해 $1 \le b \le 4$인 b에 대하여 $$\int_1^b g(y)dy = \mathrm{P}(1 \le Y \le b)$$ 이다. 그런데 $\mathrm{P}(1 \le Y \le b) = \mathrm{P}(1 \le X \le \sqrt{b})$이고 확률 $\mathrm{P}(1 \le X \le \sqrt{b})$은 함수 $y = \frac{4}{15}x^3$의 그래프와 x축 및 두 직선 $x=1,\ x=\sqrt{b}$와 둘러싸인 도형의 넓이이므로 $\int_1^{\sqrt{b}} \frac{4}{15}x^3 dx = \frac{1}{15}(b^2-1)$이다. 즉, $\int_1^b g(y)dy = \frac{1}{15}(b^2-1)$이다. 따라서 $1 \le x \le 4$인 x에 대하여 $\int_1^x g(y)dy = \frac{1}{15}(x^2-1)$이다. 그런데 함수 $g(y)$가 구간 [1, 4]에서 연속이므로 제시문 (ㄹ)에 의해 $1 < x < 4$인 x에 대하여 $$g(x) = \frac{d}{dx}\int_1^x g(y)dy$$ 이다.	10점
그러므로 $1 < x < 4$인 x에 대하여 $$g(x) = \frac{d}{dx}\int_1^x g(y)dy = \frac{d}{dx}\frac{1}{15}(x^2-1) = \frac{2}{15}x$$ 이다. 따라서 $g(3) = \frac{2}{5}$이다.	5점

문항 3

제시문 (ㄱ)~(ㄷ)을 읽고 문제(논제 1, 논제 2)에 답하시오. (40점)

(ㄱ)

[좌표평면 위의 두 점 사이의 거리] 좌표평면 위의 두 점 $\mathrm{A}(x_1, y_1)$, $\mathrm{B}(x_2, y_2)$ 사이의 거리는 다음과 같다.

$$\overline{\mathrm{AB}} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

(ㄴ)

실수 a, b에 대하여 다음 조건을 모두 만족하는 점 (a, b) 전체의 집합을 E라고 하자.

i) $b \neq 0$
ii) 점 $\mathrm{P}(0, 0)$, $\mathrm{Q}(a, b)$, $\mathrm{R}(a+b, 0)$는 반지름이 1인 동일한 원 위에 있다.

(ㄷ)

제시문 (ㄴ)의 집합 E에 속한 점 (x, y)와 점 $\mathrm{S}(-\sqrt{2}, 1)$ 사이의 거리의 최솟값을 m이라고 하자.

[논제 1] (20점) 제시문 (ㄴ)의 집합 E에 속한 모든 점을 좌표평면 위에 나타내고 그 근거를 논술하시오.

[논제 2] (20점) 제시문 (ㄷ)의 m의 값을 구하고 그 근거를 논술하시오.

문항 3 출제의도 및 평가기준

01. 출제의도

가) 원의 방정식의 의미를 이해하고 구할 수 있는지 확인한다.
나) 선분의 수직이등분선을 구할 수 있는지 확인한다.
다) 두 점 사이의 거리를 활용할 수 있는지 확인한다.
라) 조건을 만족하는 모든 점을 좌표평면 위에 나타낼 수 있는지 확인한다.
마) 좌표평면에서 원과 점의 위치관계를 이해하고 이를 활용할 수 있는지 확인한다.
바) 이차함수의 최대, 최소를 이해하고, 이를 활용할 수 있는지 확인한다.
사) 두 수의 대소를 비교할 수 있는지 확인한다.

02. 평가기준

[논제 1] (20점)

우선 $b\neq 0$이므로 $\mathrm{P}\neq\mathrm{Q}$이고 $\mathrm{Q}\neq\mathrm{R}$이다. 그러므로 $\mathrm{P}=\mathrm{R}$ $(a+b=0)$인 경우와 $\mathrm{P}\neq\mathrm{R}$ $(a+b\neq 0)$인 경우로 나누어서 생각한다.

1) $a+b\neq 0$인 경우

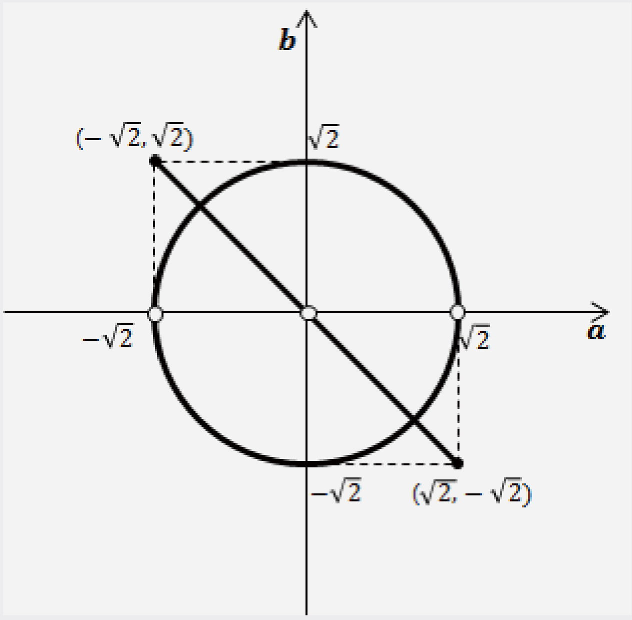
제시문 (ㄴ)의 세 점 P, Q, R을 지나는 원은 삼각형 $\triangle\mathrm{PQR}$의 외접원이다. 따라서 원의 중심은 선분 $\overline{\mathrm{PQ}}$의 수직이등분선과 $\overline{\mathrm{PR}}$의 수직이등분선의 교점이다. 선분 $\overline{\mathrm{PQ}}$의 수직이등분선은 $a\neq 0$인 경우 $y=-\frac{a}{b}\left(x-\frac{a}{2}\right)+\frac{b}{2}$, $a=0$인 경우 $y=\frac{b}{2}$이다. 즉 $y=-\frac{a}{b}\left(x-\frac{a}{2}\right)+\frac{b}{2}$이다. 선분 $\overline{\mathrm{PR}}$의 수직이등분선이 $x=\frac{a+b}{2}$이므로 세 점을 지나는 원의 중심은 $\left(\frac{a+b}{2},-\frac{a-b}{2}\right)$이다. 외접원의 반지름이 1이므로 실수 a, b가 만족하는 식은

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^2+\left(-\frac{a-b}{2}\right)^2=1.$$

즉,

$$a^2+b^2=2\ (\text{단, } a+b\neq 0,\ b\neq 0).$$

5점

2) $a+b=0$인 경우 반지름이 1인 원이 좌표평면 위의 두 점을 지나기 위해서는 두 점 사이의 거리가 2 이하면 된다. 따라서 a의 범위는 다음과 같다. $$\left\lvert \overline{\mathrm{PQ}} \right\rvert = \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{a^2+(-a)^2} = \sqrt{2}\,\lvert a \rvert \le 2. \ (*)$$ 그러므로 제시문 (ㄴ)의 조건 i)와 부등식 (*)에 의해 $$a+b=0 \qquad (-\sqrt{2} \le a < 0,\quad 0 < a \le \sqrt{2})$$	5점
1), 2)의 경우에 의해서 집합 E에 속한 모든 점을 좌표평면 위에 나타내면 다음과 같다.  	10점

[논제 2] (20점)

제시문 (ㄱ)에 의해서 E의 한 점 (x,y)와 점 S 사이의 거리 l은 다음과 같다. $$l=\sqrt{(x+\sqrt{2})^2+(y-1)^2}\ \text{(단, }(x,y)\in E)$$ **1) 점 (x,y)가 $x^2+y^2=2$ (단, $y\neq 0$)을 만족하는 경우** 원 $x^2+y^2=2$의 중심을 O라고 하자. 점 S가 원 $x^2+y^2=2$의 외부에 있으므로, $y\neq 0$인 원 $x^2+y^2=2$ 위의 점 (x,y)와 점 S 사이의 거리는 점 (x,y)가 선분 $\overline{\mathrm{OS}}$와 원 $x^2+y^2=2$ $(y\neq 0)$의 교점일 때 최소가 된다. 점 S의 y좌표가 0이 아니므로 원 $x^2+y^2=2\,(y\neq 0)$ 교점이 존재하고 이 때의 거리는 다음과 같다. $$m_1=\sqrt{3}-\sqrt{2}$$	5점
2) 점 (x,y)가 $x+y=0$ (단, $0<\|x\|\leq\sqrt{2}$)을 만족하는 경우 $$l=\sqrt{(x+\sqrt{2})^2+(y-1)^2}=\sqrt{(x+\sqrt{2})^2+(x+1)^2}=\sqrt{2\left(x+\frac{\sqrt{2}+1}{2}\right)^2+\frac{3}{2}-\sqrt{2}}$$ 여기서 $-\sqrt{2}\leq-\frac{\sqrt{2}+1}{2}<0$ 이므로 거리의 최솟값은 다음과 같다. $$m_2=\sqrt{\frac{3}{2}-\sqrt{2}}=1-\frac{\sqrt{2}}{2}$$	5점
1), 2)에 의해서 m은 $m_1=\sqrt{3}-\sqrt{2}$와 $m_2=1-\frac{\sqrt{2}}{2}$ 중 작은 값이 된다. 한편 $m_1-m_2=\sqrt{3}-\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$이고, $\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2=\frac{3}{2}+\sqrt{2}<\frac{3}{2}+\sqrt{\frac{9}{4}}=3=(\sqrt{3})^2$이다. 그러므로 $m_1>m_2$이다. 따라서 $m=m_2=1-\frac{\sqrt{2}}{2}$이다.	10점