3. 자연과학, 공학계열, 간호학과(자연) 논술전형 문제

문항 1

제시문 (ㄱ)~(ㄷ)을 읽고 문제(논제 1, 논제 2)에 답하시오. (20점)

ㄱ

수열 $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n, \cdots$이 첫째항 a_1부터 차례대로 일정한 수 d를 더하여 얻은 수열일 때, 즉 $a_{n+1} = a_n + d$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ 일 때, 이 수열 $\{a_n\}$을 등차수열이라 하고, 일정한 수 d를 이 수열의 공차라고 한다.

ㄴ

수열 $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n, \cdots$이 첫째항 a_1부터 차례대로 일정한 수 r를 곱하여 얻은 수열일 때, 즉 $a_{n+1} = a_n r$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ 일 때, 이 수열 $\{a_n\}$을 등비수열이라 하고, 일정한 수 r를 이 수열의 공비라고 한다.

ㄷ

각 항이 양의 실수인 등비수열 $\{p_n\}$은 실수 c에 대하여 다음 식을 만족한다.

$$p_{2017} = {p_1}^2 - c$$

[논제 1] (10점) 어떤 수열 $\{a_n\}$이 등차수열이면서 동시에 등비수열일 때, 이 수열 $\{a_n\}$은 어떤 수열인지 논술하시오.

[논제 2] (10점) 제시문 (ㄷ)의 수열 $\{p_n\}$에 대하여 $\{\log p_n\}$이 등비수열일 때, 가능한 모든 c 값의 집합을 구하고 그 근거를 논술하시오.

문항 1의 출제의도 및 해설, 평가기준

01 출제의도

가) 등차수열, 등비수열의 뜻을 이해하는지 확인한다.
나) 이차함수의 그래프와 직선의 위치 관계를 이해하는지 확인한다.

02 문항해설

- 등차수열, 등비수열의 뜻을 이해하고 이를 통해 어떤 수열이 등차수열이면서 동시에 등비수열이 되는가를 논리적으로 이끌어낼 수 있는지를 평가한다.
- 로그의 성질로부터 등비수열의 로그가 등차수열이 되는지를 이해하고, 등차수열이면서 동시에 등비수열이 되는 조건을 문제에서 주어진 상황에 적용할 수 있는지, 이차방정식이 실근을 갖는 조건을 이차함수의 그래프와 직선의 위치관계로 해석할 수 있는지 등을 평가한다.

03 평가기준

[논제 1] 10점

수열 $\{a_n\}$이 등차수열이면서 동시에 등비수열이라고 하자. 수열 $\{a_n\}$이 등차수열이므로 처음 세 항 a_1, a_2, a_3는 a_2-d, a_2, a_2+d라고 쓸 수 있다.	4점
또한 수열 $\{a_n\}$은 등비수열이므로 $a_2^2=a_1a_3$이다. 따라서 $a_2^2=a_1a_3=(a_2-d)(a_2+d)=a_2^2-d^2$이다. 그러므로 $d=0$이 된다.	4점
즉, 수열 $\{a_n\}$은 모든 자연수 n에 대하여 $a_n=a_1$이 성립하는 수열이다.	2점

[논제 2] 10점

수열 $\{p_n\}$은 등비수열이므로 $p_n=p_1r^{n-1}$이라고 쓸 수 있다. 그러면 $\log p_n=\log p_1+(n-1)\log r$이므로 수열 $\{\log p_n\}$은 등차수열이다. 논제의 조건으로부터 수열 $\{\log p_n\}$이 등비수열이므로 논제1의 결과에 의해 수열 $\{\log p_n\}$의 모든 항은 $\log p_1$과 같다. 즉, 수열 $\{p_n\}$의 모든 항은 p_1과 같다.	5점
따라서 $p_1=p_1^2-c$가 성립한다. 즉, p_1은 이차방정식 $x^2-x=c$의 양의 실근이 된다. 그런데 이 이차방정식의 실근은 이차함수 $y=x^2-x$의 그래프와 직선 $y=c$가 만나는 점의 x좌표와 같으므로 이차 방정식 $x^2-x=c$은 $c\geq-\frac{1}{4}$이면 양의 실근을 갖지만, $c<-\frac{1}{4}$일 때는 양의 실근을 갖지 않는다. 따라서 가능한 모든 c값의 집합은 $\left\{c \mid c\geq-\frac{1}{4}\right\}$이다.	5점

문항 2

제시문 (ㄱ)~(ㄹ)을 읽고 문제(논제 1, 논제 2)에 답하시오. (40점)

ㄱ

실수 a, b에 대하여 함수 $f(x)$는 다음과 같다.

$$f(x)=ax^3-3ax^2+4ax+a^2-b$$

ㄴ

자연수 n과 제시문 (ㄱ)의 함수 $f(x)$에 대하여 다음 두 조건을 동시에 만족하는 좌표평면 위의 점 (a,b)로 이루어진 영역의 넓이를 A_n이라고 하자.

i) $-\sqrt{n} \le a \le \sqrt{n}$
ii) 방정식 $f(x)=0$은 닫힌 구간 $[0,1]$에서 적어도 하나의 실근을 갖는다.

ㄷ

[함수의 증가와 감소의 판정]

함수 $g(x)$가 어떤 구간에서 미분가능하고, 그 구간의 모든 x에 대하여
i) $g'(x)>0$이면 $g(x)$는 그 구간에서 증가한다.
ii) $g'(x)<0$이면 $g(x)$는 그 구간에서 감소한다.

ㄹ

[사이값 정리]

함수 $h(x)$가 닫힌 구간 $[c,d]$에서 연속이고, $h(c)\neq h(d)$이면, $h(c)$와 $h(d)$ 사이에 있는 임의의 값 k에 대하여 $h(e)=k$인 e가 열린 구간 (c,d)에 적어도 하나 존재한다.

[논제 1] **(20점) 제시문 (ㄱ)의 함수 $f(x)$는 $a=0$일 때 상수함수이다. $a\neq 0$일 때 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 조사하고 그 근거를 논술하시오.**

[논제 2] **(20점) 제시문 (ㄴ)의 A_n에 대하여 급수 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{A_n}{n+1}$의 수렴, 발산을 조사하고 그 근거를 논술하시오.**

문항 2의 출제의도 및 해설, 평가기준

01 출제의도

가) 미분법을 활용하여 함수의 증가와 감소, 극대와 극소를 이해하고 판정할 수 있는지 확인한다.
나) 연속함수의 성질을 이해하고, 이를 활용할 수 있는지 확인한다.
다) 수열의 극한에 관한 기본 성질을 이해하고, 이를 이용하여 극한값을 구할 수 있는지 확인한다.
라) 급수의 수렴, 발산의 뜻을 알고, 이를 판별할 수 있는지 확인한다.

02 문항해설

- 미분, 적분법은 속도, 가속도, 넓이, 부피와 같은 물리량을 측정하는 데 있어서 가장 핵심적인 도구로, 건축, 토목 그리고 첨단 과학에 이르기까지 광범위한 분야에서 널리 활용된다. 본 문항의 핵심적인 내용은 수학 Ⅰ, Ⅱ 그리고 미적분 Ⅰ에서 다루어진다. 따라서 본 문항을 통해 학생들이 제시문을 읽고 함수의 증가와 감소, 극대와 극소를 이해하고 판정할 수 있는지, 연속함수의 성질을 이해하고 이를 활용할 수 있는지, 수열의 극한에 관한 기본 성질을 이해하고 이를 이용하여 극한값을 구할 수 있는지, 급수의 수렴, 발산의 뜻을 알고 이를 판별할 수 있는지, 풀이를 논리적으로 전개할 수 있는지를 평가한다.

03 평가기준

[논제 1] 20점

제시문 (ㄱ)에서 주어진 함수 $f(x)$를 x에 대하여 미분하면 다음과 같다. $f'(x) = 3ax^2 - 6ax + 4a$	4점
도함수를 정리하면 다음과 같다. $f'(x) = 3a\left(x^2 - 2x + 1 + \frac{1}{3}\right)$ $= 3a\left((x-1)^2 + \frac{1}{3}\right)$	6점
i) $a > 0$일 때 모든 실수 x에 대하여 $f'(x) > 0$이므로 제시문 (ㄷ)에서 주어진 함수의 증가와 감소의 판정에 의해 함수 $f(x)$는 실수 전체에서 증가한다.	5점
ii) $a < 0$일 때 모든 실수 x에 대하여 $f'(x) < 0$이므로 제시문 (ㄷ)에서 주어진 함수의 증가와 감소의 판정에 의해 함수 $f(x)$는 실수 전체에서 감소한다.	5점

[논제 2] 20점

i) $a=0$인 경우, 제시문 (ㄱ)에서 주어진 함수는 $f(x)=-b$가 되어 방정식 $f(x)=0$이 구간 $[0,1]$에서 실근을 갖기 위해서는 $b=0$이어야 한다. 따라서 $(a,b)=(0,0)$이다.	3점
ii) $a \neq 0$인 경우. 논제 1)에 의해서, 함수 $f(x)$는 실수 전체에서 증가$(a>0)$ 하거나, 감소$(a<0)$ 한다. 따라서 방정식 $f(x)=0$은 실수 전체에서 많아야 하나의 실근을 갖는다. 방정식 $f(x)=0$이 구간 $[0,1]$에서 하나의 실근을 갖기 위해서는 $f(0)=0$ 또는 $f(1)=0$ 또는, 제시문 (ㄹ)의 사이값 정리에 의해서, 다음의 식을 만족하여야 한다. $$f(0)f(1)=(a^2-b)(a^2+2a-b)<0$$ 즉, $\begin{cases} a^2-b \geq 0 \\ a^2+2a-b \leq 0 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} a^2-b \leq 0 \\ a^2+2a-b \geq 0 \end{cases}$ 를 만족하여야 한다.	7점
i), ii) 와 제시문 (ㄴ)의 조건 i)에 의해서, 제시문 (ㄴ)의 영역은 $b=a^2+2a$, $b=a^2$, $a=\pm\sqrt{n}$으로 둘러싸인 영역이다. 넓이 A_n는 $$A_n=\int_{-\sqrt{n}}^{\sqrt{n}} \left\|(a^2+2a)-a^2\right\| da=4\int_0^{\sqrt{n}} a\,da=2n$$ 이다.	5점
위의 A_n으로부터, $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{A_n}{n+1}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n}{n+1}$$ 이다. $\lim_{n\to\infty}\frac{2n}{n+1}=2\neq 0$ 이므로 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{A_n}{n+1}$은 발산한다.	5점

문항 3

제시문 (ㄱ)~(ㄷ)을 읽고 문제(논제 1, 논제 2)에 답하시오. (40점)

ㄱ

좌표평면의 원점 위에 놓인 점 P가 있다. 동전을 한 번 던질 때마다 앞면이 나오면 점 P를 x축의 방향으로 2만큼, 뒷면이 나오면 y축의 방향으로 1만큼 움직인다. 동전을 20번 던졌을 때 점 P의 좌표를 (i, j)라고 하자.

ㄴ

[이항계수의 성질] 자연수 n에 대하여 다음 등식이 성립한다.

$$ {}_n\mathrm{C}_0 + {}_n\mathrm{C}_1 + {}_n\mathrm{C}_2 + \cdots + {}_n\mathrm{C}_n = 2^n $$

ㄷ

자연수 n에 대하여 다음 등식이 성립한다.

$$ {}_n\mathrm{C}_0 - {}_n\mathrm{C}_1 + {}_n\mathrm{C}_2 - {}_n\mathrm{C}_3 + \cdots + (-1)^n {}_n\mathrm{C}_n = 0 $$

[논제 1] (20점) 제시문 (ㄱ)의 점 (i, j)와 점 $(0, 10)$ 사이의 거리가 10보다 작을 확률을 구하고 그 근거를 논술하시오.

[논제 2] (20점) 제시문 (ㄱ)의 점 (i, j)에 대하여 $(i+1)j$가 홀수가 될 확률을 구하고 그 근거를 논술하시오.

문항 3의 출제의도 및 평가기준

01 출제의도

가) 수학적 확률의 의미와 확률의 기본 성질을 이해하고 이를 활용할 수 있는지 확인한다.

나) 이항정리를 이용하여 여러 가지 문제를 해결할 수 있는지 확인한다.

02 평가기준

[논제 1] 20점

20번의 시행에서 앞면이 나오는 횟수를 m이라고 하면 뒷면이 나오는 횟수는 $(20-m)$이다. 이 경우 점 P의 좌표는 $(2m, 20-m)$이다.	6점
이 점과 점$(0, 10)$ 사이의 거리의 제곱이 100보다 작으므로 $4m^2+(10-m)^2<100$ 이다. 이 부등식을 풀면 $5m^2-20m=5m(m-4)<0$에서 m의 범위는 $0<m<4$ 이고, 조건을 만족하는 m의 값은 $m=1, 2, 3$이다.	6점
이는 동전의 앞면이 각각 1, 2, 3번 나오는 경우이므로 총 경우의 수는 ${}_{20}\mathrm{C}_1+{}_{20}\mathrm{C}_2+{}_{20}\mathrm{C}_3=20+190+1140=1350$ 가지이다.	4점
이항계수의 성질에 의하여 전체의 경우의 수는 ${}_{20}\mathrm{C}_0+{}_{20}\mathrm{C}_1+{}_{20}\mathrm{C}_2+\cdots+{}_{20}\mathrm{C}_{20}=2^{20}$ 이므로 확률은 $\dfrac{1350}{2^{20}}\left(=\dfrac{675}{2^{19}}\right)$ 이다.	4점

[논제 2] 20점

20번의 시행에서 앞면이 나오는 횟수를 m이라고 하면 뒷면이 나오는 횟수는 $(20-m)$이다. 이 경우 점 P의 좌표는 $(2m, 20-m)$이다. $(i+1)j=(2m+1)(20-m)$가 홀수가 되기 위해서는 $(20-m)$이 홀수이면 된다. 따라서 $m=1, 3, \cdots, 19$이다.	10점
즉, 앞면이 $1, 3, 5, \cdots, 19$번 나오는 경우이고 앞면이 m번 나오는 경우의 수는 ${}_{20}\mathrm{C}_{m}$이므로 총 경우의 수는 $${}_{20}\mathrm{C}_{1}+{}_{20}\mathrm{C}_{3}+\cdots+{}_{20}\mathrm{C}_{19}$$ 이 된다.	5점
제시문 (ㄷ)에 의하여 $${}_{20}\mathrm{C}_{1}+{}_{20}\mathrm{C}_{3}+\cdots+{}_{20}\mathrm{C}_{19}={}_{20}\mathrm{C}_{0}+{}_{20}\mathrm{C}_{2}+\cdots+{}_{20}\mathrm{C}_{20}$$ 이고 좌변과 우변을 더한 값은 2^{20}이므로, 좌변의 합은 $${}_{20}\mathrm{C}_{1}+{}_{20}\mathrm{C}_{3}+\cdots+{}_{20}\mathrm{C}_{19}=2^{19}$$ 이 된다. 따라서 확률은 $\frac{2^{19}}{2^{20}}=\frac{1}{2}$ 이다.	5점