<출제원칙>

1. 출제 방침

1) 고교 교과서에 기반한 고교 과정 내의 문제를 출제한다.
2) 제시문에 대한 독해력과 분석력, 제시문을 바탕으로 제시된 문제를 해결하는 사고력과 적용하는 능력, 생각하는 바를 논리적으로 전개하는 논술능력을 측정하는 문제를 출제한다.

2. 출제 유형

1) 지문제시형 문제를 출제한다.
2) 제시문은 고교 교과서("수학 I", "수학 II", "미적분 I", "확률과 통계")를 참조하여 구성한다.
3) 수리논술(이과, 간호-자연) 문제는 지문에 대한 정확한 독해력, 내용의 분석 능력, 제시된 지식을 이용하여 문제를 해결하는 능력 등을 측정하는 문제를 출제한다. 점수는 100 점이며 변별력을 위해 3개의 문항으로 구성하되, 각 문항은 2개의 소 논제로 구성한다.
4) 약 90-100분 이내에 작성하도록 한다.

3. 출제 의도

1) [문항 1]
고교 교육과정에 나오는 미분계수의 개념을 잘 이해하고 그리고 제시문의 내용을 이해하여 직선의 방정식을 이끌어 내는 능력을 평가할 수 있도록 하였다. 또한, 간단한 절대 부등식을 이용하여 최솟값을 구할 수 있는 능력도 평가할 수 있도록 하였다.

2) [문항 2]
제시문을 통해 제시된 정의에 맞게 논리적으로 판단할 수 있는 능력을 판단하고자 하였다. 그 과정에서 이차 함수의 최대, 최소에 대한 수학적 이해 능력을 요구하였다.

3) [문항3]
일상생활에서 마주칠 수 있는 선택의 상황으로부터 확률분포를 이끌어 낼 수 있는 능력을 평가할 수 있도록 하였다. 기댓값 및 분산으로부터 얻어지는 수열의 극한값을 계산할 수 있는 능력 또한 판단 하고자 하였다.

4) 궁극적으로 고등학교 수학 문제 제시를 통해 대학 진학 후 이과과목을 수강할 수 있을 정도의 기초적인 능력을 갖추고 있는지를 측정하고자 하였다.

<채점기준>

1. 기본 사항

1) 각 논제를 각각 가중치를 가지고 채점하되 총점으로 환산하여 총괄 평가. 수리논술에서는 **배당된 점수 범위 내에서 등급이 아닌 점수로 표기하여 합산함**.

2) 채점위원 2인이 1조가 되어 한 답안지를 1차와 2차로 나누어 채점하고, 1차 채점의 결과가 만점의 25% 이상의 차이가 날 경우 채점위원이 공동 합의로 2차 채점을 진행하고, 2차 채점에서 위원간의 조정이 이루어지지 않을 경우 3차 채점을 실시한다. 3차 채점은 출제위원을 포함한 새로운 채점위원 2인이 채점하되 1차 채점의 상위와 하위 점수 사이의 점수를 부여한다.

3) 논술 답안에 수험생의 신원을 알릴 만한 요소가 있을 때는 다음과 같이 처리한다.
① 이름이 본문 내용과 별도로 표기된 경우 : 내용, 형식 모두 0점으로 채점
② 이름이 본문 중에 자연스럽게 노출된 경우 : 형식 부분에서 5점 감점
③ 제목이 표기된 경우 : 형식 부분에서 5점 감점
④ 기타 의도적으로 수험생의 신원을 알리는 기호로 판단되는 요소가 있는 경우 : 사안의 경중에 따라 형식 부분에서 5점 이상 감점

2. 세부 사항

1) 문제의 의도에서 완전히 이탈했거나 각 논제와 전혀 다른 내용을 서술한 경우는 0점으로 채점한다.
2) 각 문항 별 채점 기준은 다음과 같다.

[문항 1] (20점)

(논제 1) (10점)

함수 $f(x)$를 $f(x)=kx^2$라고 정의할 때, $f'(1)=2k$이다. 따라서 곡선 $y=kx^2$위의 점 $A(1,k)$를 지나는 접선의 방정식은 $l_1 : y=2k(x-1)+k$이다.	5점
점 $(1,k)$에서 접선 l_1에 수직하는 직선의 기울기는 제시문 (ㄴ)에 의해서, $-\dfrac{1}{2k}$임을 알 수 있다. 따라서 접선 l_1에 수직하고 $f(x)$위의 한 점 $(1,k)$을 지나는 직선의 방정식은 $l_2 : y=-\dfrac{1}{2k}(x-1)+k$ 이다.	5점

(논제 2) (10점)

산술 기하 평균의 관계식을 이용하여 L의 최솟값을 구한다.	5점
L이 최소일 때의 조건을 이용하여 k값을 구한다.	5점

[문항 2] (40점)

(논제 1) (20점)

함수 $f(x)$는 다음을 만족한다. $$f(x)=(x+b)^2-b^2-a^2+1. \qquad (*)$$ **1) $-1 \le b \le 1$인 경우** 함수 $f(x)$는 $x=-b$일 때 최소값 $-b^2-a^2+1$을 갖는다. 따라서 점 (a,b)가 $-b^2-a^2+1 \ge 0$ 즉, $a^2+b^2 \le 1$ 을 만족할 때, 함수 $f(x)$는 $\lvert x\rvert \le 1$인 모든 x에 대하여 $f(x) \ge 0$이 된다.	6점
2) $b>1$인 경우 함수 $f(x)$는 $\lvert x\rvert \le 1$인 모든 x에 대해 $f(x) \ge f(-1)=-2b-a^2+2$을 만족한다. 따라서 점 (a,b)가 $2b+a^2 \le 2$을 만족할 때, 함수 $f(x)$는 $\lvert x\rvert \le 1$인 모든 x에 대하여 $f(x) \ge 0$이 된다. 하지만 $b>1$인 경우, $2<2b+a^2$이 되어 모순이 발생한다. 따라서 $b>1$인 경우, $\lvert x\rvert \le 1$인 모든 x에 대하여 $f(x) \ge 0$이 되도록 하는 점 (a,b)는 존재하지 않는다.	7점
3) $b< -1$인 경우 $b>1$인 경우와 마찬가지로, $\lvert x\rvert \le 1$인 모든 x에 대하여 $f(x) \ge 0$이 되도록 하는 점 (a,b)는 존재하지 않는다. 1), 2), 3) 에 의해서 영역 A는 중심이 원점이고 반지름이 1인 원과 그 내부 점들의 모임이다. 따라서 A의 넓이는 π이다.	7점

계산 실수 혹은 오타로 인한 오답은 총 10점 이내에서 감점.

(논제 2) (20점)

<table>
<tr><td>

1) $|b|>1$인 경우

식 (*)에 의해서 함수 $f(x)$는 $|x|\geq 1$인 모든 x에 대하여 $f(x)\geq f(-b)=-b^2-a^2+1$을 만족한다. 따라서 점 (a,b)가 $-b^2-a^2+1\geq 0$ 즉, $a^2+b^2\leq 1$ 을 만족할 때, 함수 $f(x)$는 $|x|\geq 1$인 모든 x에 대하여 $f(x)\geq 0$이 된다. 하지만 $|b|>1$인 경우, $1<a^2+b^2$ 이 되어 모순이 발생한다. 따라서 $|b|>1$인 경우, $|x|\geq 1$인 모든 x에 대하여 $f(x)\geq 0$이 되도록 하는 점 (a,b)는 존재하지 않는다.

</td><td>5점</td></tr>
<tr><td>

2) $0\leq b\leq 1$인 경우

식 (*)에 의해서 함수 $f(x)$는 $|x|\geq 1$인 모든 x에 대하여 $f(x)\geq f(-1)=-2b-a^2+2$을 만족한다. 따라서 점 (a,b)가 $-2b-a^2+2\geq 0$ $(0\leq b\leq 1)$, 즉 $b\leq -\frac{1}{2}a^2+1$ $(0\leq b\leq 1)$을 만족할 때, 함수 $f(x)$는 $|x|\geq 1$인 모든 x에 대하여 $f(x)\geq 0$이 된다.

</td><td>5점</td></tr>
<tr><td>

3) $-1\leq b<0$인 경우

$0\leq b\leq 1$인 경우와 마찬가지로, $b\geq \frac{1}{2}a^2-1$ $(-1\leq b<0)$을 만족할 때, 함수 $f(x)$는 $|x|\geq 1$인 모든 x에 대하여 $f(x)\geq 0$이 된다.

</td><td>5점</td></tr>
<tr><td>

1), 2), 3)에 의해서 영역 B은 곡선 $b\geq \frac{1}{2}a^2-1$와 곡선 $b\leq -\frac{1}{2}a^2+1$로 둘러싸인 도형이 된다. 따라서 B의 넓이는

$$4\int_0^{\sqrt{2}}\left(-\frac{a^2}{2}+1\right)da=4\left[-\frac{a^3}{6}+a\right]_0^{\sqrt{2}}=\frac{8}{3}\sqrt{2}$$

이다.

</td><td>5점</td></tr>
</table>

계산 실수 혹은 오타로 인한 오답은 총 10점 이내에서 감점.

[문항 3] (40점)

(논제 1) (10점)

<table>
<tr><td>

확률변수 X_4가 가질 수 있는 값은 1, 2, 3, 4이고 확률실험의 모든 경우의 수는 16가지이다. 또한 $X_4=k$, $(k=1,2,3,4)$이기 위한 시행의 결과는 아래와 같다.

<table>
<tr><th>$X_4=k$</th><th colspan="7">결과</th></tr>
<tr><td>1</td><td>(1,1)</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>2</td><td>(1,2)</td><td>(2,1)</td><td>(2,2)</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>3</td><td>(1,3)</td><td>(2,3)</td><td>(3,3)</td><td>(3,2)</td><td>(3,1)</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>4</td><td>(1,4)</td><td>(2,4)</td><td>(3,4)</td><td>(4,4)</td><td>(4,3)</td><td>(4,2)</td><td>(4,1)</td></tr>
</table>

</td><td>5점</td></tr>
<tr><td>

따라서 X_4의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

<table>
<tr><td>X_4</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>합계</td></tr>
<tr><td>$P(X_4=x)$</td><td>$\frac{1}{16}$</td><td>$\frac{3}{16}$</td><td>$\frac{5}{16}$</td><td>$\frac{7}{16}$</td><td>1</td></tr>
</table>

</td><td>5점</td></tr>
</table>

계산 실수 혹은 오타로 인한 오답은 총 10점 이내에서 감점.

(논제 2) (30점)

확률변수 X_n이 가질 수 있는 값은 1, 2, $\cdots$, n이고 이 시행의 모든 경우의 수는 n^2가지이다. 또한 $X_n = k$이기 위해서는 꺼낸 카드의 숫자가 $(1,k)$, $(2,k)$, $\cdots$, (k,k), $(k,k-1)$, $\cdots$, $(k,1)$의 $(2k-1)$가지 이므로 $P(X_n = k) = \frac{2k-1}{n^2}$, $(k=1, 2, \cdots, n)$이다.	10점
따라서 $E(X_n) = \sum_{k=1}^{n} kP(X_n = k) = \sum_{k=1}^{n} k \cdot \frac{2k-1}{n^2} = \frac{(n+1)(4n-1)}{6n}$ $E(X_n^2) = \sum_{k=1}^{n} k^2 P(X_n = k) = \sum_{k=1}^{n} k^2 \cdot \frac{2k-1}{n^2} = \frac{(n+1)(3n^2+n-1)}{6n}$, $Var(X_n) = E(X_n^2) - \{E(X_n)\}^2 = \frac{(n+1)(3n^2+n-1)}{6n} - \left\{\frac{(n+1)(4n-1)}{6n}\right\}^2$ $= \frac{(n+1)(n-1)(2n^2+1)}{36n^2}$ 이다.	15점
그러므로 $\lim_{n\to\infty} \frac{E(X_n)}{\sqrt{V(X_n)}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(n+1)(4n-1)}{6n}}{\sqrt{\frac{(n+1)(n-1)(2n^2+1)}{36n^2}}}$	5점

계산 실수 혹은 오타로 인한 오답은 총 10점 이내에서 감점.

<예시답안>

[문항 1] (20점)

논제1

함수 $f(x)$를 $f(x)=kx^2$라고 정의할 때, $f'(1)=2k$이다. 따라서 곡선 $y=kx^2$위의 점 $A(1,k)$를 지나는 접선의 방정식은 $l_1 : y=2k(x-1)+k$이다. 점 $(1,k)$에서 접선 l_1에 수직하는 직선의 기울기는 제시문 (ㄴ)에 의해서, $-\frac{1}{2k}$임을 알 수 있다. 따라서 접선 l_1에 수직하고 $f(x)$위의 한 점 $(1,k)$을 지나는 직선의 방정식은 $l_2 : y=-\frac{1}{2k}(x-1)+k$ 이다.

논제2

제시문 (ㄷ)에서 주어진 점 P와 점 Q의 y좌표는 각각 $2k+k=3k$, $-\frac{1}{2k}+k$이다. 따라서 두 점 사이의 길이 L은 $3k+\frac{1}{2k}-k=2k+\frac{1}{2k}$이다. 제시문 (ㄹ) 제시된 산술·기하평균 관계식을 이용하면 $L=2k+\frac{1}{2k}\geq 2\sqrt{1}=2$이고 등호는 $2k=\frac{1}{2k}$일 때 성립한다. 따라서 길이 L의 최솟값은 2이고 이 때의 k값은 $k=\frac{1}{2}$ 이다.

[문항 2] (40점)

논제 1

함수 $f(x)$는 다음을 만족한다.
$f(x)=(x+b)^2-b^2-a^2+1$. (*)

1) $-1 \le b \le 1$인 경우

함수 $f(x)$는 $x=-b$일 때 최소값 $-b^2-a^2+1$을 갖는다. 따라서 점 (a,b)가 $-b^2-a^2+1 \ge 0$ 즉, $a^2+b^2 \le 1$ 을 만족할 때, 함수 $f(x)$는 $|x| \le 1$인 모든 x에 대하여 $f(x) \ge 0$이 된다.

2) $b>1$인 경우

함수 $f(x)$는 $|x| \le 1$인 모든 x에 대해 $f(x) \ge f(-1)=-2b-a^2+2$을 만족한다. 따라서 점 (a,b)가 $2b+a^2 \le 2$을 만족할 때, 함수 $f(x)$는 $|x| \le 1$인 모든 x에 대하여 $f(x) \ge 0$이 된다. 하지만 $b>1$인 경우, $2<2b+a^2$이 되어 모순이 발생한다. 따라서 $b>1$인 경우, $|x| \le 1$인 모든 x에 대하여 $f(x) \ge 0$이 되도록 하는 점 (a,b)는 존재하지 않는다.

3) $b< -1$인 경우

$b>1$인 경우와 마찬가지로, $|x| \le 1$인 모든 x에 대하여 $f(x) \ge 0$이 되도록 하는 점 (a,b)는 존재하지 않는다.

1), 2), 3) 에 의해서 영역 A는 중심이 원점이고 반지름이 1인 원과 그 내부 점들의 모임이다. 따라서 A의 넓이는 π이다.

논제 2

1) $|b|>1$인 경우

식 (*)에 의해서 함수 $f(x)$는 $|x| \ge 1$인 모든 x에 대하여 $f(x) \ge f(-b)=-b^2-a^2+1$을 만족한다. 따라서 점 (a,b)가 $-b^2-a^2+1 \ge 0$ 즉, $a^2+b^2 \le 1$ 을 만족할 때, 함수 $f(x)$는 $|x| \ge 1$인 모든 x에 대하여 $f(x) \ge 0$이 된다. 하지만 $|b|>1$인 경우, $1<a^2+b^2$ 이 되어 모순이 발생한다. 따라서 $|b|>1$인 경우, $|x| \ge 1$인 모든 x에 대하여 $f(x) \ge 0$이 되도록 하는 점 (a,b)는 존재하지 않는다.

2) $0 \le b \le 1$인 경우

식 (*)에 의해서 함수 $f(x)$는 $|x| \ge 1$인 모든 x에 대하여 $f(x) \ge f(-1)=-2b-a^2+2$을 만족한다. 따라서 점 (a,b)가 $-2b-a^2+2 \ge 0$ $(0 \le b \le 1)$, 즉 $b \le -\frac{1}{2}a^2+1$ $(0 \le b \le 1)$을 만족할 때, 함수 $f(x)$는 $|x| \ge 1$인 모든 x에 대하여 $f(x) \ge 0$이 된다.

3) $-1<b<0$인 경우

$0 \le b \le 1$인 경우와 마찬가지로, $b \ge \frac{1}{2}a^2-1$ $(-1<b<0)$을 만족할 때, 함수 $f(x)$는 $|x| \ge 1$인 모든 x에 대하여 $f(x) \ge 0$이 된다.

1), 2), 3)에 의해서 영역 B은 곡선 $b \ge \frac{1}{2}a^2-1$와 곡선 $b \le -\frac{1}{2}a^2+1$로 둘러싸인 도형이 된다. 따라서 B의 넓이는

$$4\int_0^{\sqrt{2}}\left(-\frac{a^2}{2}+1\right)da=4\left[-\frac{a^3}{6}+a\right]_0^{\sqrt{2}}=\frac{8}{3}\sqrt{2}$$

이다.

[문항 3] (40점)

논제 1

확률변수 X_4가 가질 수 있는 값은 1, 2, 3, 4이고 확률실험의 모든 경우의 수는 16가지이다. 또한 $X_4=k$, $(k=1,2,3,4)$이기 위한 시행의 결과는 아래와 같다.

$X_4=k$	결과						
1	(1,1)						
2	(1,2)	(2,1)	(2,2)				
3	(1,3)	(2,3)	(3,3)	(3,2)	(3,1)		
4	(1,4)	(2,4)	(3,4)	(4,4)	(4,3)	(4,2)	(4,1)

따라서 X_4의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X_4	1	2	3	4	합계
$P(X_4=x)$	$\frac{1}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{5}{16}$	$\frac{7}{16}$	1

논제 2

확률변수 X_n이 가질 수 있는 값은 1, 2, $\cdots$, n이고 이 시행의 모든 경우의 수는 n^2가지이다. 또한 $X_n=k$이기 위해서는 꺼낸 카드의 숫자가 $(1,k)$, $(2,k)$, $\cdots$, (k,k), $(k,k-1)$, $\cdots$, $(k,1)$의 $(2k-1)$가지 이므로 $P(X_n=k)=\frac{2k-1}{n^2}$, $(k=1,2,\cdots,n)$이다. 따라서

$$E(X_n)=\sum_{k=1}^{n}kP(X_n=k)=\sum_{k=1}^{n}k\cdot\frac{2k-1}{n^2}=\frac{(n+1)(4n-1)}{6n}$$

$$E(X_n^2)=\sum_{k=1}^{n}k^2P(X_n=k)=\sum_{k=1}^{n}k^2\cdot\frac{2k-1}{n^2}=\frac{(n+1)(3n^2+n-1)}{6n},$$

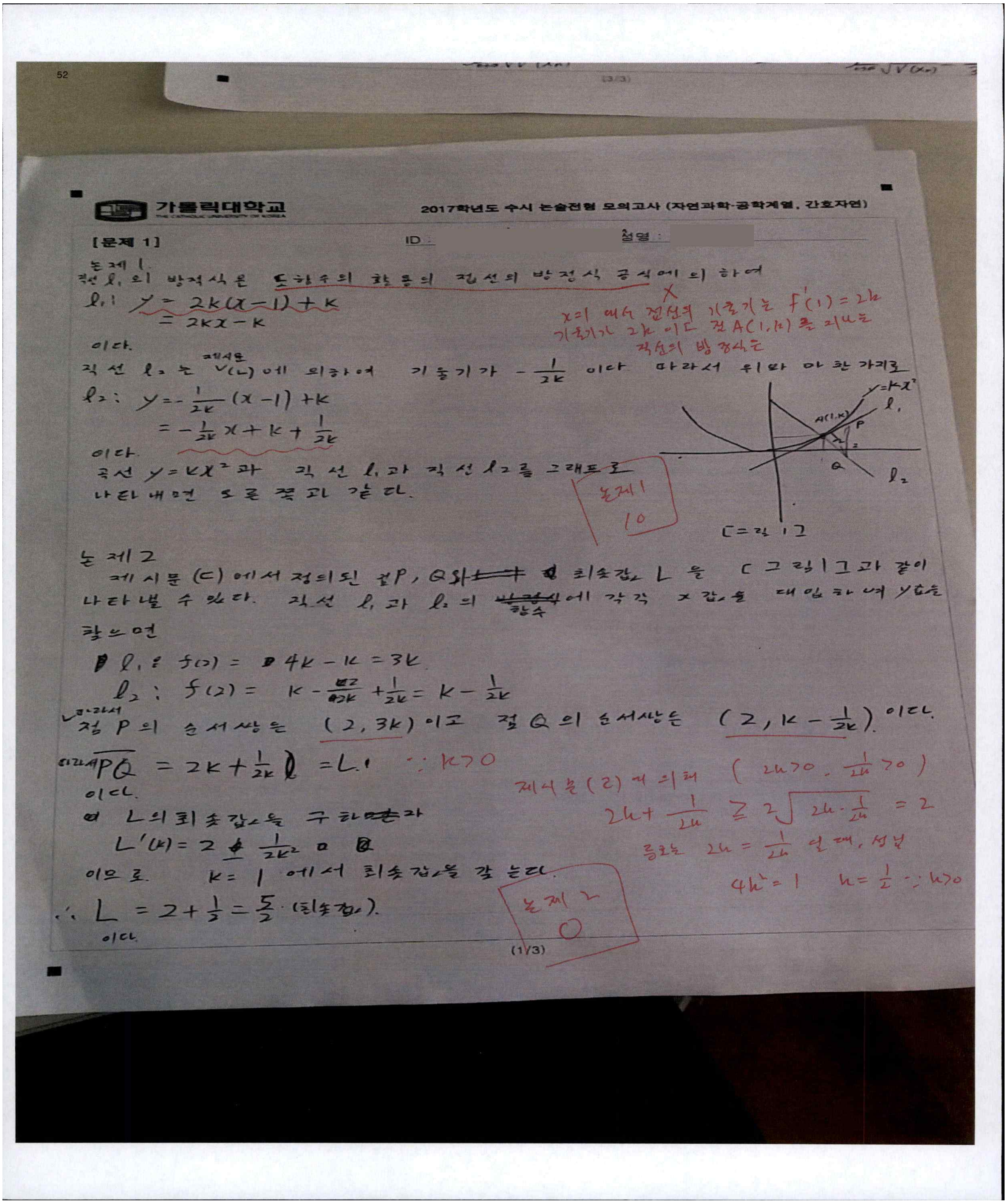
$$\begin{aligned}Var(X_n)=E(X_n^2)-\{E(X_n)\}^2&=\frac{(n+1)(3n^2+n-1)}{6n}-\left\{\frac{(n+1)(4n-1)}{6n}\right\}^2\\&=\frac{(n+1)(n-1)(2n^2+1)}{36n^2}\end{aligned}$$

이다. 그러므로

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{E(X_n)}{\sqrt{V(X_n)}}&=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{(n+1)(4n-1)}{6n}}{\sqrt{\frac{(n+1)(n-1)(2n^2+1)}{36n^2}}}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)(4n-1)}{\sqrt{(n+1)(n-1)(2n^2+1)}}=\frac{4}{\sqrt{2}}=2\sqrt{2}\end{aligned}$$

<학생 답안 첨삭 예시>

[문항 (1)]



가톨릭대학교 THE CATHOLIC UNIVERSITY OF KOREA

2017학년도 수시 논술전형 모의고사 (자연과학·공학계열, 간호자연)

[문제 1]　　ID :　　성명 :

논제 1.

직선 l_1의 방정식은 ~~도함수의 활용의 접선의 방정식 공식~~에 의하여

l_1: $y = 2k(x-1)+k$

$= 2kx - k$

이다.

x=1 에서 접선의 기울기는 $f'(1)=2k$

기울기가 2k 이고 점 A(1, k)를 지나는

직선의 방정식은

직선 l_2는 제시문 (L)에 의하여 기울기가 $-\frac{1}{2k}$ 이다 따라서 위와 마찬가지로

l_2: $y = -\frac{1}{2k}(x-1)+k$

$= -\frac{1}{2k}x + k + \frac{1}{2k}$

이다.

곡선 $y=kx^2$과 직선 l_1과 직선 l_2를 그래프로 나타내면 오른쪽과 같다.

$y=kx^2$, l_1, l_2, A(1, k), P, Q

[그림 1]

논제1
10

논제 2

제시문 (C)에서 정의된 점P, Q와 ~~+~~ 최솟값 L을 [그림1]과 같이 나타낼 수 있다. 직선 l_1과 l_2의 ~~방정식~~ 함수에 각각 x 값을 대입하여 y값을 찾으면

l_1: $f(2) = 4k - k = 3k$

l_2: $f(2) = k - \frac{2}{2k} + \frac{1}{2k} = k - \frac{1}{2k}$

따라서 점 P의 순서쌍은 $(2, 3k)$이고 점 Q의 순서쌍은 $(2, k-\frac{1}{2k})$ 이다.

따라서 $\overline{PQ} = 2k + \frac{1}{2k} = L$. ∵ k>0

이다.

L의 최솟값을 구하면

$L'(k) = 2 - \frac{1}{2k^2} = 0$

이므로 k=1 에서 최솟값을 갖는다.

∴ $L = 2 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$ (최솟값).

이다.

제시문 (2)에 의해 $(2k>0,\ \frac{1}{2k}>0)$

$2k + \frac{1}{2k} \geq 2\sqrt{2k \cdot \frac{1}{2k}} = 2$

등호는 $2k = \frac{1}{2k}$ 일 때, 성립

$4k^2 = 1$　$k = \frac{1}{2}$ ∵ k>0

논제 2
0

(1/3)

[문항 (2)]

[문제 2] ID : 성명 :

~~$f(-1)\geq 0,\ f(0)\geq 0$~~

논제 1.

제시문 (ㄴ)에 의해

$f(-1) = 2-2b-a^2 \geq 0$

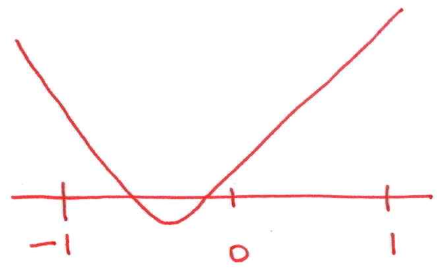
$f(0) = -a^2+1 \geq 0$

$f(1) = 2+2b-a^2 \geq 0$ 이므로

a의 범위는 $-1 \leq a \leq 1$ 이고

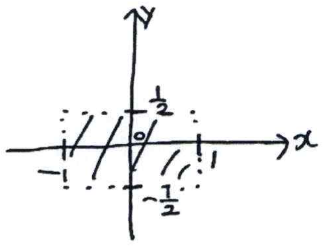
b의 범위는 $b \leq \frac{1}{2}$, $b \geq -\frac{1}{2}$ 이다.

따라서 제시문 (ㄴ)을 만족하는 점 (a, b) 전체인 영역 A는 아래 그림과 같다.



이런 모양의 이차 방정식은 $f(-1)\geq 0,\ f(0)\geq 0,\ f(1)\geq 0$ 의 조건들은 만족하지만 $-1\leq x\leq 1$ 에서 모두 $f(x)\geq 0$ 는 아니다.

그러므로 영역 A의 넓이는 $2\times 1 = 2$ 이다.



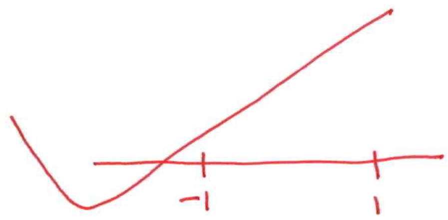
논제 2.

$f(x) = x^2+2bx-a^2+1$

$= (x+b)^2-a^2-b^2+1$ 에서

$-a^2-b^2+1 \geq 0$ 이므로

$a^2+b^2 \leq 1$ 이다.



이런 모양의 2차 방정식은 $f(-1)\geq 0,\ f(1)\geq 0$ 이지만 $|x|\geq 1$인 모든 x에 대해 $f(x)\geq 0$은 아니다

또한 제시문 (ㄷ)에 의해

$f(-1) = 2-2b-a^2 \geq 0$

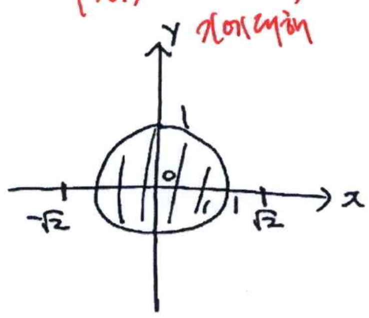
$f(1) = 2+2b-a^2 \geq 0$ 이므로

$f(-1)+f(1) \geq 0$

$4-2a^2 \geq 0$ 이고

$-\sqrt{2} \leq a \leq \sqrt{2}$ 이다.

따라서 영역 B는 오른쪽 그림과 같고 넓이는 π 이다.



가톨릭대학교 THE CATHOLIC UNIVERSITY OF KOREA

2017학년도 수시 논술전형 모의고사 (자연과학·공학계열, 간호자연)

[문제 3] 30 ID : 성명 :

10 논제1. 빨간 주머니에서 꺼낸 수를 a, 파란 주머니에서 꺼낸 수를 b라 했을때. 나올수 있는 순서쌍을 (a, b)라고 하자 Good!

$n=4$ 일때, 꺼낼수 있는 총 가짓수는 16 이며 X_1의 순서쌍은 $(1,1)$, X_2의 순서쌍은 $(1,2)$, $(2,1)$ $(2,2)$ 이다. 이와 같은 방법으로 X_4의 순서쌍 까지 구한후 확률 분포표로 나타내보면

X	1	2	3	4	합계
$P(X=x_i)$	$\frac{1}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{5}{16}$	$\frac{7}{16}$	1

이다.

20 논제2. 논제1 에 의해 $P_k = \frac{2k-1}{n^2}$, $x_k = k$ 임을 알수 있다. $P(X_n = k)$ 임을 설명.

제시문 (나) 에 의해 $E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i P_i = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{2k-1}{n^2}\right) k$

$$= \frac{1}{n^2}\left\{2 \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{n(n+1)}{2}\right\}$$

$$= \frac{(4n-1)(n+1)}{6} \text{ 이고}$$

$$V(X) = \sum_{i=1}^{n} \{x_i - E(X)\}^2 P_i = \sum_{k=1}^{n} \left\{k - \frac{(4n-1)(n+1)}{6}\right\}^2 \frac{2k-1}{n^2}$$

$$= \frac{1}{n^2}\left[\left\{\frac{(4n-1)(n+1)}{6}\right\}^2 \sum_{k=1}^{n}(2k-1) + \left\{\frac{(4n-1)(n+1)}{6}\right\} \sum_{k=1}^{n}(2k-4k^2) + \sum_{k=1}^{n}(2k^3-k^2)\right]$$

$$= \frac{(4n^2+3n-1)^2}{36} + \frac{4n^2+3n-1}{6}\left(\frac{-8n^3-6n^2+2n}{6}\right)\frac{1}{n^2} + \frac{(4n^2+3n-1)}{6}\left(\frac{3n^4+4n^3-n}{6}\right)\frac{1}{n^2} \text{ 이므로}$$

계산 −5

$$\lim_{n\to\infty} \frac{E(X_n)}{\sqrt{V(X_n)}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{4n^2+3n-1}{6}}{\sqrt{\frac{(4n^2+3n-1)}{6}\left\{\left(\frac{4n^2+3n-1}{6}\right) - \left(\frac{8n^2+6n-2}{6n}\right) + \left(\frac{3n^3+4n^2-1}{6n}\right)\right\}}} \times \frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n^2}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{4 + \frac{3}{n} - \frac{1}{n^2}}{\left(4 + \frac{3}{n} - \frac{1}{n^2}\right)\left\{\left(\frac{2}{3} + \frac{1}{2n} - \frac{1}{6n^2}\right) - \left(\frac{4}{3n} + \frac{1}{n^2} - \frac{1}{3n^3}\right) + \left(\frac{1}{2} + \frac{4}{3n} - \frac{1}{6n^3}\right)\right\}}$$

$$= \frac{4}{4\left(\frac{2}{3} + \frac{1}{2}\right)}$$

$$= \frac{6}{7} \text{ 이다.}$$ −5

따라서 $\lim_{n\to\infty} \frac{E(X_n)}{\sqrt{V(X_n)}} = \frac{6}{7}$ 이다.

$E(X^2)$을 먼저 계산한 후 $V(X) = E(X^2) - \{E(X)\}^2$ 으로 계산하는 것이 좋습니다.

(3/3)