

---

### 3. 간호학과(자연) 논술고사 문제

※ 문항 1, 문항 2는 생략함(자연과학부, 공학계열 논술고사 문제와 동일)

[문항 3] 제시문 (ㄱ)~(ㄹ)을 읽고 문제(문제 1, 문제 2)에 답하십시오. (40점)

---

(ㄱ) 구슬이 들어 있는 상자가 있다. 상자에 들어 있는 구슬 중 100개는 빨간 구슬이고 나머지는 파란 구슬이다. 이 상자에서 구슬을 100번 꺼내어 색깔을 확인한다. 이 100번 중 빨간 구슬을 꺼낸 횟수를  $m$ 이라고 하자. 전체 구슬의 개수가  $N$ 일 때, 빨간 구슬을 꺼낸 횟수가  $m$ 일 확률을  $P_N(m)$ 이라고 하자.

(ㄴ) [규칙 1] 상자에서 구슬을 꺼낼 때, 임의로 한 개를 꺼내어 색을 확인하고, 그 구슬을 상자에 넣지 않는다.

(ㄷ) [규칙 2] 상자에서 구슬을 꺼낼 때, 임의로 한 개를 꺼내어 색을 확인하고, 그 구슬을 다시 상자에 넣는다.

(ㄹ) 수열  $\{a_n\}$ 의  $N$ 번째 항이 최대가 되기 위한 필요조건은 " $a_N \geq a_{N-1}$ 이고  $a_N \geq a_{N+1}$ "이다.

문제 1. (20점) 제시문 (ㄴ)의 [규칙 1]을 따라서 구슬을 100번 꺼낼 때, 확률  $P_n(12)$ 가 최대가 되는  $N$ 은 어떤 값인지 제시문 (ㄹ)을 이용하여 논술하십시오.

문제 2. (20점) 제시문 (ㄷ)의 [규칙 2]를 따라서 구슬을 100번 꺼낼 때, 확률  $P_n(10)$ 이 최대가 되는  $N$ 은 어떤 값인지 논술하십시오.

채점기준

문제 1 [20점]

<p><math>a = 100, M = 100, m = 12</math> (<math>a</math>는 빨간 구슬의 개수, <math>M</math>은 시행 횟수, <math>m</math>은 빨간 구슬을 꺼낸 횟수) 라고 하면, <math>P_N(12) = \frac{{}^{N-a}C_{M-m} {}^aC_m}{N C_M}</math>이다.</p>	5
<p>이로부터 <math>\frac{P_{N-1}(12)}{P_N(12)}</math>를 계산하면,</p> $\frac{P_{N-1}(12)}{P_N(12)} = \frac{(N-1-a)!N!}{(M-m)!(N-1-a-M+m)!M!(N-M)!} = \frac{N(N-a-M+m)}{(N-M)(N-a)}$	5
<p>제시문 (ㄹ)에 의해, <math>P_N(12)</math>가 최대가 되려면, 우선 <math>\frac{N(N-a-M+m)}{(N-M)(N-a)} \leq 1</math>이어야 한다. 이를 정리하면 다음의 부등식이 나온다. <math>N \leq \frac{aM}{m}</math>.</p>	4
<p><math>\frac{P_{N+1}(12)}{P_N(12)} \leq 1</math>는 위 부등식의 <math>N</math>에 <math>N+1</math>을 넣고, 부등식의 방향을 바꾼 것과 같으므로, <math>P_N(12)</math>가 최대가 되는 필요조건은 <math>\frac{aM}{m} - 1 \leq N \leq \frac{aM}{m}</math>이다.</p>	4
<p>이 조건을 만족하는 자연수는 1개 밖에 없으므로 그 자연수가 우리가 찾는 최댓값을 주는 <math>N</math>이다. <math>\frac{aM}{m} = \frac{10000}{12} = \frac{2500}{3} = 833.3\ldots</math>이므로 <math>N = 833</math>이다.</p>	2

문제 2 [20점]

<p><math>a = 100, M = 100, m = 10</math> (<math>a</math>는 빨간 구슬의 개수, <math>M</math>은 시행 횟수, <math>m</math>은 빨간 구슬을 꺼낸 횟수) 라고 하면, <math>P_N(10) = {}_M C_m \left(\frac{a}{N}\right)^m \left(1 - \frac{a}{N}\right)^{M-m}</math>이다.</p>	5
<p>최대가 되는 <math>N</math>을 찾기 위해 함수 <math>f(x) = x^m (1-x)^{M-m}</math>을 생각하자. 이 함수를 미분하면 <math>f'(x) = x^{m-1}(1-x)^{M-m-1}(m-Mx)</math>이므로, <math>x = \frac{m}{M}</math>에서 최대가 된다.</p>	12
<p><math>{}_M C_m</math>은 <math>N</math>과 무관하므로, 최대가 되는 <math>N</math>은 <math>N = \frac{aM}{m} = 1000</math>이다.</p>	3