3. 자연과학, 공학계열 논술고사 문제

[문항 1] 제시문 (ㄱ)~(ㄹ)을 읽고 문제(논제 1, 논제 2)에 답하시오. (20점)

(ㄱ) 함수 f, g, h를 다음과 같이 정의한다.

$$f(x) = x^3 - x,\ g(x) = \frac{3}{4}x^4 + \frac{2}{3}x^3 + x,\ h(x) = x + 1$$

(ㄴ) 실수 r, α에 대하여 2차 정사각행렬 A를 다음과 같이 정의한다.

$$A = \begin{pmatrix} f(r) & g(r) + \alpha \\ 1 & h(r) \end{pmatrix}$$

(ㄷ) 실수 β에 대하여 2차 정사각행렬 B를 다음과 같이 정의한다.

$$B = \begin{pmatrix} f(2) & g(2) + \beta \\ 1 & h(2) \end{pmatrix}$$

(ㄹ) 영행렬을 O, 단위 행렬을 E라고 할 때, 2차 정사각행렬 $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$는 항상 다음 등식을 만족한다.

$$X^2 - (a+d)X + (ad-bc)E = O$$

논제 1. (10점) 임의의 실수 r에 대하여 제시문 (ㄴ)에서 정의된 행렬 A의 역행렬이 존재하기 위한 모든 α의 범위에 대하여 논술하시오.

논제 2. (10점) 제시문 (ㄷ)에서 정의된 행렬 B에 대하여 B^n의 모든 성분의 합을 S_n이라고 하자. 행렬 B의 역행렬이 존재하지 않을 때, $\lim_{n\to\infty} \frac{\log_3 S_n}{n}$ 의 값을 구하고 그 근거를 논술하시오. (단, n은 자연수)

평가기준

논제 1 [10점]

행렬 $A=\begin{pmatrix} f(r) & g(r)+\alpha \\ 1 & h(r) \end{pmatrix}$의 역행렬이 임의의 실수 r에 대하여 존재하려면 임의의 실수 r에 대해 $f(r)h(r)-g(r)-\alpha \neq 0$ 이어야 한다. $F(r)=f(r)h(r)-g(r)-\alpha$이라고 하면 $F(r)=\frac{1}{4}r^4+\frac{1}{3}r^3-r^2-2r-\alpha$ 이다.	3
그런데 $F'(r)=r^3+r^2-2r-2=(r+1)(r^2-2)$이고 $F(-\sqrt{2})=-1+\frac{4}{3}\sqrt{2}-\alpha$, $F(\sqrt{2})=-1-\frac{4}{3}\sqrt{2}-\alpha$이므로 $F(r)$은 $r=\sqrt{2}$일 때 최소값 $F(\sqrt{2})=-1-\frac{4}{3}\sqrt{2}-\alpha$을 가지고 $\lim_{r\to\infty}F(r)=\infty$, $\lim_{r\to-\infty}F(r)=\infty$ 이므로 임의의 실수 r에 대해 $F(r)\neq 0$일 필요충분조건은 $F(\sqrt{2})=-1-\frac{4}{3}\sqrt{2}-\alpha>0$인 것이다. 따라서 행렬 A의 역행렬이 임의의 실수 r에 대하여 존재하기 위한 모든 α의 범위는 $\alpha<-1-\frac{4}{3}\sqrt{2}$ 이다.	7

논제 2 [10점]

행렬 $B=\begin{pmatrix} f(2) & g(2)+\beta \\ 1 & h(2) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 6 & g(2)+\beta \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$의 역행렬이 존재하지 않는 경우는 $g(2)+\beta=18$인 경우이다. 이 때 제시문 (ㄹ)에 의해 $B^2-9B=O$을 만족한다. 따라서 $B^n=9^{n-1}B$ 이다.	5
그러므로 행렬 B의 역행렬이 존재하지 않을 때 B^n의 모든 성분의 합은 $S_n=28\times 9^{n-1}$ 이다. 따라서 행렬 B의 역행렬이 존재하지 않을 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{\log_3(S_n)}{n}=2$ 이다.	5

[문항 2] 제시문 (ㄱ)~(ㄷ)을 읽고 문제(논제 1, 논제 2)에 답하시오. (40점)

(ㄱ) 수열 $\{s_n\}$의 일반항을 다음과 같이 정의하자.

$$s_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}=1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}$$

그리고 실수 r에 대하여 수열 $\{p_n\}$의 일반항을 다음과 같이 정의하자.

$$p_n=\frac{s_n}{n^r}$$

(ㄴ) 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$이 수렴하고, $\lim_{n\to\infty}a_n=\alpha$, $\lim_{n\to\infty}b_n=\beta$ (α, β는 실수)일 때, 수열 $\{c_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여 $a_n\le c_n\le b_n$이고 $\alpha=\beta$이면 $\lim_{n\to\infty}c_n=\alpha$이다.

(ㄷ) **(수학적 귀납법)** 자연수 n에 대한 명제 $p(n)$이 모든 자연수에 대하여 성립함을 증명하려면 다음 두가지를 증명하면 된다.

① $n=1$일 때, 명제 $p(n)$이 성립한다.
② $n=k$일 때 명제 $p(n)$이 성립한다고 가정하면, $n=k+1$일 때도 명제 $p(n)$이 성립한다.

논제 1. (20점) 제시문 (ㄱ)에서 정의된 수열 $\{s_n\}$은 모든 자연수 n에 대하여 다음 부등식을 만족함을 수학적 귀납법을 이용하여 논술하시오.

$$2\sqrt{n+1}-2\le s_n\le 2\sqrt{n}$$

논제 2. (20점) 제시문 (ㄱ)에서 정의된 수열 $\{p_n\}$이 수렴하도록 하는 모든 r의 범위에 대하여 논술하시오.

평가기준

논제 1 [20점]

먼저 $$s_n \le 2\sqrt{n} \qquad ①$$ 이 성립함을 보이자. 1) $n=1$일 때, $$(\text{좌변})=s_1=1, \quad (\text{우변})=2\sqrt{1}=2.$$ 따라서 $n=1$일 때, ①이 성립한다.	2
2) $n=k\ (k\ge 2)$일 때, ①이 성립한다고 가정하면 $$s_k \le 2\sqrt{k} \qquad \text{(i).}$$ (i) 의 각 변에 $\dfrac{1}{\sqrt{k+1}}$을 더해주면, $$s_{k+1} \le 2\sqrt{k}+\frac{1}{\sqrt{k+1}}$$ 이 때 $$\sqrt{k+1}-\sqrt{k}=\frac{1}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}} \ge \frac{1}{2\sqrt{k+1}}$$ $$\Rightarrow \qquad 2\sqrt{k}+\frac{1}{\sqrt{k+1}} \le 2\sqrt{k+1}$$ 이므로, $$s_{k+1} \le 2\sqrt{k}+\frac{1}{\sqrt{k+1}} \le 2\sqrt{k+1}.$$ 따라서 $n=k+1$일 때도 ①이 성립한다. 1), 2)가 성립하므로 모든 자연수 n에 대하여 ①이 성립한다.	8
다음으로 $$2\sqrt{n+1}-2 \le s_n \qquad ②$$ 이 성립함을 보이자. 3) $n=1$일 때, $$(\text{좌변})=2\sqrt{2}-2 \approx 0.828, \quad (\text{우변})=s_1=1.$$ 따라서 $n=1$일 때, ②이 성립한다.	2

4) $n=k\ (k\geq 2)$일 때, ②이 성립한다고 가정하면 $$2\sqrt{k+1}-2\leq s_k \qquad \text{(ii).}$$ (ii) 의 각 변에 $\dfrac{1}{\sqrt{k+1}}$을 더해주면, $$2\sqrt{k+1}+\frac{1}{\sqrt{k+1}}-2\leq s_{k+1}$$ 이 때 $$\sqrt{k+2}-\sqrt{k+1}=\frac{1}{\sqrt{k+2}+\sqrt{k+1}}\leq\frac{1}{2\sqrt{k+1}}$$ $$\Rightarrow \qquad 2\sqrt{k+2}\leq 2\sqrt{k+1}+\frac{1}{\sqrt{k+1}}$$ 이므로, $$s_{k+1}\geq 2\sqrt{k+1}+\frac{1}{\sqrt{k+1}}-2\geq 2\sqrt{k+2}-2.$$ 따라서 $n=k+1$일 때도 ②이 성립한다. 3), 4)가 성립하므로 모든 자연수 n에 대하여 ②이 성립한다. 모든 자연수 n에 대하여 ①, ②가 성립하므로, 모든 자연수 n에 대하여 논제 1의 부등식이 성립한다.	8

논제 2 [20점]

논제 1에 의해서 모든 실수 r에 대하여 $\dfrac{2\sqrt{n+1}-2}{n^r}=2n^{1/2-r}\left(\sqrt{1+\dfrac{1}{n}}-\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)\leq\dfrac{s_n}{n^r}\leq\dfrac{2\sqrt{n}}{n^r}=2n^{1/2-r}$ 이다. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}=0$이고, $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n}}=0$이므로,	
제시문 (ㄴ)에 의하여 $r=\dfrac{1}{2}$이면 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{s_n}{n^r}=2,$	6
$r>\dfrac{1}{2}$이면 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{s_n}{n^r}=0,$	6
$r<\dfrac{1}{2}$이면 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{s_n}{n^r}=\infty$이다.	6
따라서 $r\geq\dfrac{1}{2}$이면, 수열 $\{p_n\}$은 수렴한다.	2

주의사항

논제 1에서 2), 4)의 부등식에 대한 설명이 없으면 0점.
"1), 2)가 성립하므로 모든 자연수 n에 대하여 ①이 성립한다."
"3), 4)가 성립하므로 모든 자연수 n에 대하여 ②이 성립한다."
"모든 자연수 n에 대하여 ①, ②가 성립하므로, 모든 자연수 n에 대하여 논제 1의 부등식이 성립한다."의 내용이 없으면 1개당 1점씩 감점.

논제 2에서 3가지 경우를 논리적으로 정확하게 찾는 경우에만 6점씩 부여.

[문항 3] 제시문 (ㄱ)~(ㄹ)을 읽고 문제(논제 1, 논제 2)에 답하시오. (40점)

(ㄱ) 상수 a에 대하여 다항함수 $f(x)$는 다음 식을 만족한다.

$$\int_0^x (x-t)f(t)\,dt = \frac{1}{24}x^4 - \frac{a}{6}x^3 + \frac{a^2+2a}{8}x^2$$

(ㄴ) 닫힌 구간 $c \le x \le d$에서 함수 $f(x)$의 최댓값과 최솟값을 구할 때에는 극댓값과 극솟값, 그리고 $f(c)$, $f(d)$의 값을 비교하여 그 중에서 가장 큰 값을 최댓값으로, 가장 작은 값을 최솟값으로 하면 된다. (단, $f(x)$는 연속함수)

(ㄷ) 실수 c에 대하여 $[c]$는 c보다 크지 않은 최대의 정수이다.

(ㄹ) 닫힌 구간 $c \le x \le d$에서 정의된 함수 $g(x)$에 대하여 함수 $[g(x)]$가 닫힌 구간 $c \le x \le d$에서 연속이려면, 어떤 정수 n에 대하여 다음을 만족하여야 한다.

$c \le x \le d$인 모든 x에 대하여 $n \le g(x) < n+1$

논제 1. (10점) 상수 a에 대하여 제시문 (ㄱ)의 함수 $f(x)$를 구하시오.

논제 2. (30점) 제시문 (ㄱ)의 함수 $f(x)$에 대하여 함수 $[f(x)]$가 닫힌 구간 $0 \le x \le 2$에서 연속함수가 되도록 하는 모든 a의 범위에 대하여 논술하시오. (단, $0<a<1$)

평가기준

논제 1 [10점]

$$\int_0^x (x-t)f(t)\,dt = x\int_0^x f(t)\,dt - \int_0^x t f(t)\,dt$$ 이므로 주어진 등식의 양변을 x에 대하여 미분하면 $$xf(x)+\int_0^x f(t)\,dt - xf(x) = \frac{1}{6}x^3 - \frac{a}{2}x^2 + \frac{a^2+2a}{4}x$$ $$\Rightarrow \quad \int_0^x f(t)\,dt = \frac{1}{6}x^3 - \frac{a}{2}x^2 + \frac{a^2+2a}{4}x.$$	5
위 식의 양변을 x에 대하여 미분하면 $$f(x) = \frac{1}{2}x^2 - ax + \frac{a^2+2a}{4}$$ 를 얻을 수 있다.	5

논제 2 [30점]

$0<a<1$이므로 함수 $f(x)=\frac{1}{2}x^2-ax+\frac{a^2+2a}{4}=\frac{1}{2}(x-a)^2-\frac{1}{4}(a-1)^2+\frac{1}{4}$는 구간 $[0,2]$에서 $x=a$에서 최솟값 $f(a)=-\frac{1}{4}a^2+\frac{1}{2}a=-\frac{1}{4}(a-1)^2+\frac{1}{4}$, $x=2$에서 최댓값 $f(2)=\frac{1}{4}a^2-\frac{3}{2}a+2$을 갖는다.	10
최솟값 $f(a)$는 다음을 만족한다. $$0<f(a)=-\frac{1}{4}(a-1)^2+\frac{1}{4}\le\frac{1}{4}<1.$$ 제시문 (ㄹ)에 의하여 구간 $[0,2]$에서 함수 $[f(x)]$가 연속이기 위해서는 $$f(2)=\frac{1}{4}a^2-\frac{3}{2}a+2<1$$ 이어야 한다.	10
위의 식으로부터 $$(a-3+\sqrt{5})(a-3-\sqrt{5})<0 \quad \Rightarrow \quad 3-\sqrt{5}<a<3+\sqrt{5}.$$ 따라서 $3-\sqrt{5}<a<1$일 때, 구간 $[0,2]$에서 $[f(x)]=0$이 되어 함수 $[f(x)]$는 연속이다.	10