<학생 답안 예시 및 첨삭>

[문항 (가)]

[문제 1]

논제1. 제시문 (나)에 의하여 $\frac{1}{x-a}\int_a^x g(t)(t-a)dt = g(c)(c-a)$ 를 만족하는 c가 열린구간 (a, x)에 적어도 하나 존재한다. $g(x)$, $g(x)(x-a)$가 연속함수임을 먼저 보여야 함.

따라서 $\lim_{x \to a+0} \frac{1}{(x-a)^2} \int_a^x g(t)(t-a)dt$

$= \lim_{x \to a+0} \frac{1}{x-a} \times g(c)(c-a)$ ~~이다.~~ $= \lim_{x \to a+0} g(c)\frac{c-a}{x-a} \le \lim_{x \to a+0} g(c) = g(a) = 0$ 이다.
$(\because c-a < x-a)$

~~제시문 (나)에서 $\lim_{b \to a+0} \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt = \lim_{b \to a+0} f(c) = f(a)$ 라 하였으므로~~

~~위 식은 $\lim_{x \to a+0} \frac{1}{x-a} \times g(a)(a-a)$ 가 되므로 0 이다.~~

∴ 위 식은 0이다.

30 ~~20~~

논제 2. 논제 1의 식에서 $x \neq a$ 이므로 $g(t) = \frac{f(t)-f(a)}{t-a} - f'(a)$ 이다.

$\therefore \lim_{x \to a+0} \frac{1}{(x-a)^2} \int_a^x \left(\frac{f(t)-f(a)}{t-a} - f'(a)\right)(t-a)dt$

$= \lim_{x \to a+0} \frac{1}{(x-a)^2} \left(\int_a^x \{f(t)-f(a)\}dt - \int_a^x f'(a)(t-a)dt \right)$

$= \lim_{x \to a+0} \frac{1}{x-a}\left[\left(\frac{1}{x-a}\int_a^x f(t)dt\right) - f(a)\right] - \frac{1}{(x-a)^2} \times f'(a)\left[\frac{1}{2}(t-a)^2\right]_a^x$

$= \lim_{x \to a+0} \frac{1}{x-a}\left[\left(\frac{1}{x-a}\int_a^x f(t)dt\right) - f(a)\right] - \frac{1}{2}f'(a) = 0$ 이므로

$\lim_{x \to a+0} \frac{1}{x-a}\left[\left(\frac{1}{x-a}\int_a^x f(t)dt - f(a)\right)\right] = \frac{1}{2}f'(a)$ 라 예측한 가훈이의 예상은 맞다.

60 ~~40~~

[문제 1]

[논제 1].

$h(x) = g(x)(x-a) = \begin{cases} f(x)-f(a)-f'(a)(x-a) & (x \neq a). \\ 0 & (x=a) \end{cases}$ 라 하자. 제시문 (나)에 따라

g(x), h(x)가 연속임을 먼저 보여야 함

~~준식~~ $\lim_{x \to a+0} \frac{1}{(x-a)^2} \int_a^x h(t)\,dt = \lim_{x \to a+0} H'(c) \times \frac{1}{x-a} = \lim_{x \to a+0} \frac{h(c)}{x-a}$ 이다. $= g(c)(c-a)$

(단. $H(x) = \int_a^x h(t)\,dt$, $c \in (a.x)$)

$= g(c) \lim_{x \to a+0} \frac{c-a}{x-a} \leq g(c)$ 인데, $x \to a+0$ 때 $c \to a$ 이고 $g(c) \to g(a)=0$

준식 $= \lim_{x \to a+0} \frac{h(c)}{x-a} = \lim_{x \to a+0} \frac{g(c)(c-a)}{x-a} = \cancel{\lim_{x \to a+0} g(x) = \lim_{x \to a+0} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} - f'(a)}$ ~~이다~~ 이므로 준식 $=0$ 이다

($\because$ $x \neq a$)

$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(d)$ $(d \in (a.x))$ 이고 $f(x)$의 도함수가 연속이므로

30

~~20~~

$\lim_{x \to a+0} f'(d) = f'(a)$ 이다. $\therefore \lim_{x \to a+0} \frac{1}{(x-a)^2} \int_a^x g(t)(t-a)\,dt = 0$ 이다.

[논제 2].

$f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t)\,dt$ 이다. $(c \in (a.b))$. $\therefore \lim_{b \to a+0} \frac{f(c)-f(a)}{b-a} = \lim_{x \to a+0} \frac{1}{x-a}\left[\left(\frac{1}{x-a}\int_a^x f(t)\,dt\right) - f(a)\right]$ 이다.

논제 1에서 $f(x)$가 미분가능하면

$g(t)(t-a) = \begin{cases} f(t)-f(a)-f'(a)(t-a) & (t \neq a) \\ 0 & (t=a) \end{cases}$ 일 때 $\lim_{x \to a+0} \frac{1}{(x-a)^2} \int_a^x g(t)(t-a)\,dt = 0$ 이다.

$g(t)(t-a) = f(t)-f(a)-(t-a)f'(a)$ $(t \neq a)$ 이므로 $\int_a^x f(t)\,dt = \int_a^x g(t)(t-a)\,dt$

$+ \int_a^x [f(a)+f'(a)(t-a)]\,dt$ 이다. $\therefore$ 준식 $= \lim_{x \to a+0} \frac{1}{x-a}\left[\left(\frac{1}{x-a}\int_a^x f(t)\,dt - f(a)\right)\right] = \lim_{x \to a+0} \left(\frac{\int_a^x g(t)(t-a)\,dt}{(x-a)^2} \right.$

$\left. + \frac{\int_a^x [f(a)+f'(a)(t-a)]\,dt}{(x-a)^2} - \frac{f(a)}{x-a} \right)$ 인데, ~~이다.~~ ~~정리하면~~ 준식 $= \lim_{x \to a+0} \left[\frac{f(a)}{x-a} + \frac{1}{2}f'(a) - \frac{f(a)}{x-a} \right]$ ~~이므로~~ $= \frac{1}{2}f'(a)$ 이다.

논제 1에 의해 $\lim_{x \to a+0} \frac{\int_a^x g(t)(t-a)\,dt}{(x-a)^2} = 0$ 이고, $\frac{\int_a^x f(a)\,dt}{(x-a)^2} = \frac{f(a)}{x-a}$, $\frac{\int_a^x f'(a)(t-a)\,dt}{(x-a)^2} = \frac{1}{2}f'(a)$ 이므로,

따라서 정의역이 실수 전체인 함수 $y=f(x)$의 도함수가 연속함수라 할때

$\lim_{x \to a+0} \frac{1}{x-a}\left[\left(\frac{1}{x-a}\int_a^x f(t)\,dt - f(a)\right)\right] = \frac{1}{2}f'(a)$ 는 항상 성립한다.

52.5 ~~35~~

[문항 (나)]

[문제 2]

논제1 $n = 2k$, $\overline{X} \sim N(m, \sigma)$

30점

$R_1 \rightarrow I = [\overline{X} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{\frac{\alpha}{2}}, \overline{X} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{\frac{\alpha}{2}}]$ ✓ $l_1(R_1) = 2 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{\frac{\alpha}{2}}$

$R_2 \rightarrow$ 표본 1 $\Rightarrow I_1 = [\overline{X}_1 - \frac{\sigma}{\sqrt{n/2}} z_{\frac{\alpha}{2}}, \overline{X}_1 + \frac{\sigma}{\sqrt{n/2}} z_{\frac{\alpha}{2}}]$ $\overline{X}_1 = \frac{X_1 + \cdots + X_k}{k}$

표본 2 $\Rightarrow I_1 = [\overline{X}_2 - \frac{\sigma}{\sqrt{n/2}} z_{\frac{\alpha}{2}}, \overline{X}_2 + \frac{\sigma}{\sqrt{n/2}} z_{\frac{\alpha}{2}}]$ $\overline{X}_2 = \frac{X_{k+1} + \cdots + X_n}{k}$

45점

if $\overline{X}_1 < \overline{X}_2$ 라면

$R_2 = [\ ?\ ] \cup [\ ?\ ]$ ✗

$l(R_2) = \overline{X}_2 + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{\frac{\alpha}{2}} - (\overline{X}_1 - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{\frac{\alpha}{2}})$

$= \overline{X}_2 - \overline{X}_1 + 2 \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{\frac{\alpha}{2}}$

$= \frac{(X_{k+1} + \cdots + X_n) - (X_1 + \cdots + X_k)}{k} + 2 \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{\frac{\alpha}{2}}$

$l(R_2) = |\overline{X}_1 - \overline{X}_2| + 2 z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n/2}}$ 이어야 함

논제 2.

10점

$E(l(R_1)) = 2 \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{\frac{\alpha}{2}}$ (일정하다)

$E(l(R_2)) = ?\ 2 \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{\frac{\alpha}{2}} + E(Y) = 2 \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \cdot z_{\frac{\alpha}{2}} + E(2m - 2\overline{X})$

$= 2 \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \cdot z_{\frac{\alpha}{2}} + 2m - 2E(\overline{X})$ ✗

15점

($\because$ $Y = 2 \cdot \frac{(X_{k+1} + \cdots + X_n) + (X_1 + \cdots + X_k) - 2 \cdot (X_1 + \cdots + X_k)}{2k}$

$= 2 \times (m - \frac{X_1 + \cdots + X_k}{k})$

$= 2(m - \overline{X}_1) = 2m - 2\overline{X}_1$)

[문제 2]

1. ① R_1 : $P(\bar{X}-d \le m \le \bar{X}+d) = 1-\alpha$

즉, $P(m-d \le \bar{X} \le m+d) = 1-\alpha$

~~35점~~ 이때, $X \sim N(m, \sigma^2)$ 이면 $\bar{X} \sim N(m, \frac{\sigma^2}{n})$ 이므로

52.5점 $Z = \frac{\bar{X}-m}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$ 이라 하면 $1-\alpha = P(m-d \le \bar{X} \le m+d) = P(-\frac{\sqrt{n}}{\sigma}d \le Z \le \frac{\sqrt{n}}{\sigma}d)$

$= 2P(0 \le Z \le \frac{\sqrt{n}}{\sigma}d)$

$\therefore P(Z \ge \frac{\sqrt{n}}{\sigma}d) = \frac{1}{2} - (\frac{1-\alpha}{2}) = \frac{\alpha}{2}$

$\therefore Z_{\frac{\alpha}{2}} = \frac{\sqrt{n}}{\sigma}d \rightarrow R_1 : [\bar{X} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}}Z_{\frac{\alpha}{2}}, \bar{X} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}}Z_{\frac{\alpha}{2}}]$ (단, $\bar{X} = \frac{X_1+X_2+\cdots+X_n}{n}$)

신뢰구간의 지름 $= (\bar{X} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}}Z_{\frac{\alpha}{2}}) - (\bar{X} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}}Z_{\frac{\alpha}{2}}) = \boxed{\frac{2\sigma}{\sqrt{n}}Z_{\frac{\alpha}{2}}}$

② R_2 : $n=2k$일 때 $\bar{X'} = \frac{X_1+\cdots+X_k}{k}$, $\bar{X''} = \frac{X_{k+1}+\cdots+X_n}{k}$ 이라 하고 일반성을 잃지 않고 $\bar{X'} \le \bar{X''}$라 하자.

그러면 $R_2 = [\bar{X'}-d, \bar{X'}+d] \cup [\bar{X''}-d, \bar{X''}+d] = [\bar{X'}-d, \bar{X''}+d]$ $k = \frac{n}{2}$

$\therefore 1-\alpha = P(\bar{X'}-d \le m \le \bar{X''}+d) = P(\bar{X'} \le m+d) \times P(m-d \le \bar{X''})$

$\bar{X'}, \bar{X''} \sim N(m, \frac{\sigma^2}{k})$ 이므로 (준식) $= P(Z \le \frac{\sqrt{k}}{\sigma}d) \times P(Z \ge -\frac{\sqrt{k}}{\sigma}d) = (1 - P(Z \ge \frac{\sqrt{k}}{\sigma}d))^2$

$\therefore d = \frac{\sigma}{\sqrt{k}}Z_{1-\sqrt{1-\alpha}} \rightarrow R_2 : [\bar{X'} - \frac{\sigma}{\sqrt{k}}Z_{1-\sqrt{1-\alpha}}, \bar{X''} + \frac{\sigma}{\sqrt{k}}Z_{1-\sqrt{1-\alpha}}]$ 또는 $[\bar{X''} - \frac{\sigma}{\sqrt{k}}Z_{1-\sqrt{1-\alpha}}, \bar{X'} + \frac{\sigma}{\sqrt{k}}Z_{1-\sqrt{1-\alpha}}]$

$(\bar{X'} \le \bar{X''})$ $(\bar{X'} > \bar{X''})$

$[\bar{X'} - Z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n/2}}, \bar{X'} + Z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n/2}}] \cup [\bar{X''}-, \bar{X''}+]$

(단, $\bar{X'} = \frac{X_1+\cdots+X_k}{k}$, $\bar{X''} = \frac{X_{k+1}+\cdots+X_{2k}}{k}$)

신뢰범위의 지름 $= \boxed{|\bar{X'}-\bar{X''}| + \frac{2\sigma}{\sqrt{k}}Z_{1-\sqrt{1-\alpha}}}$ X

2. $1-\alpha = 0.99 \rightarrow \alpha = 0.01$ R₁이 더 나은 신뢰범위가 될 필요충분조건?

~~10점~~ R_1의 지름 $= \frac{2\sigma}{\sqrt{n}} \cdot Z_{0.005} = \frac{2\sigma}{\sqrt{n}} \cdot 2.57583$ → 지름: $R_1 < R_2$ → R_1이 R_2에 비해 더 나은 신뢰범위

15점 R_2 〃 $> |\bar{X'}-\bar{X''}| + \frac{2\sigma}{\sqrt{n}} \cdot \sqrt{2} \cdot 2.32635$

$1-\alpha = 0.64 \rightarrow \alpha = 0.36$ 이면

$1-\alpha \le 0.64$이면

$\frac{2\sigma}{\sqrt{k}}Z_{1-\sqrt{1-\alpha}} = \frac{2\sigma}{\sqrt{n}} \sqrt{2} \cdot 2.05375$ 이므로 지름: $R_1 < R_2$ → R_1이 R_2에 비해 항상 더 나은 신뢰범위

(2/3)

$\frac{2\sigma}{\sqrt{n}}Z_{\frac{\alpha}{2}} = \frac{2\sigma}{\sqrt{n}}Z_{0.18} = \frac{2\sigma}{\sqrt{n}} \cdot 0.915365$

총점 ~~45~~ 67.5

[문제 3]

80/80

(700~800자 내외)

인간의 안녕과 번성을 위하여 다른 생물을 이용하여도 좋은가? 더 나아가서 생물을 변형 ~~개조~~ 해도 좋은가? 라는 질문이다. 우선 본인의 생각을 밝히자면 (나) 선거의 맥클로스키의 주장은 매우 위험한 생각이다. 자연은 인간에게 있어서 아무런 대항능력이 없고 그들의 고통 피해상황들은 표현할 수도 없다. 비유를 하자면 갓난아기에 비할 수 있다. 아기가 말도 못하고 권리를 행사할 능력이 없다고 막 대할 수 없는 것처럼 ~~자연도~~ 인류의 복지를 위해 자연을 무조건적으로 이용하는 것은 바람직하지 않다~~고 본다~~. GMI가 인류에게 어떤 이득을 가져다 준다고 해도 이는 도덕적으로 옳지 않기 때문에 반대한다. 근거? 또한 우리는 이 기술이 가져오게 될 역효과에 대해서 알 수 없다. 부작용은 빠르면 1~2년 늦게는 10년 이후에 나타난다. DDT가 생물축적이나, 다제내성균의 등장이나, 지구온난화가 자연의 치명적인 부작용의 예이다. 신기술이란 양날의 검이다. 과학자라면 더 나아가 기술을 이용하는 인간들이라면 부작용에 대해 항상 염두를 해야 한다고 생각한다.

마지막으로 우리 인간은 자연에 대해 미숙하고 무지하다. 기술문명이 발전한지 그 세기도 안 된 인간이 수십억년에 걸쳐 발전하고 체계를 갖춰온 자연을 완벽히 이해하고 개량하는 것은 불가능에 가깝다. 그리고 그 불안전한 실험체를 연구실에서 연구목적으로 사용하는 것이 아니라 밖으로 풀어버린다는 것은 일종의 도박이라 생각한다. 환경문제에 책임있는 것은 인간이다. 그 중에서도 꼭 짚자면 과학자 공학자 기술자일 것이다. 본인은 이러한 이들이 뛰어난 통찰력 창의력 모험심을 갖는 것도 중요하지만 자신의 작품이 "연구개발"에 미친 영향을 가늠할 줄 아는 자세를 갖는 것이 중요하다고 생각한다. 결론은 본인은 이 기술의 사용에 반대한다.

(3/3)

주어가 맞지 않는 문장들이 자주 발견된다. 제시문들을 활용하지 않고 개인의 상식을 토대로 논지를 전개해서 단정적인 인상을 주게 된 점이 아쉽다.

[문제 3]

B+/B0

(700~800자 내외)

유전자가 조작된 곤충은 수백만의 사람들을 살릴 수 있다는 점에서 요즘에 각광을 받고 있다. 제시문 (나)에서처럼 말라리아 등을 해결할 수 있는 방법을 알면서도 아무것도 하지 않는 것은 반인륜적이라고 생각한다. 하지만 제시문 (가)에서 나타난 쟁점 중, 인간에게 해로운 전염병을 퇴치하기 위해 GMI를 사용해야 될지에 대해서는 반대의 입장을 취한다.

왜냐하면, 제시문 (나)에 나와 있듯이, 인간은 자연의 다양성과 조화를 위해 노력해야 하기 때문이다. 만약 GMI를 사용하면, ~~자금~~ 현재 조화를 이루고 있는 자연을 인간이 유전자를 조작하게 되면서 그 조화가 깨질 수도 있다. 예를 들어, 말라리아 퇴치를 위한 GMI를 사용하면, 돌연변이가 생기거나 인간이 상상할 수 없는 큰 부작용이 생길 수도 있다. 그리고, 자연의 다양성을 추구해야 하는 인간이 오히려 자신에게만 득이 되는 것만 남기고 해가 되는 것을 모조리 없애려고 하는 것은 이기적인 행위이다 ~~인 것 같다~~. 또한 말라리아 등은 예방도 가능하고 치료도 가능한 것임에도 불구하고 이렇게 위험한 방법을 사용하는 것은 아주 심도 있게 고민해야 할 과제인 것 같다.

GMI 연구와 실험은 자연의 조화를 깨뜨릴 수 있다.

제시문 (다)와 마찬가지로 모기는 인간을 위해 생겨난 ~~다시 살~~ 것이 아니다. 모기는 살아있는 것 그 자체로 존엄하고 귀한 것이다. 그런데 인간에게 이익이 되도록 환경을 조작하는 것은 매우 위험한 일이다. 그렇다고 해서 인류에게 해가 되는 질병을 방치하자는 것은 아니다. 다만 환경과 조화를 이루고 다양성도 보존하면서 인류에게도 유익한 방법으로 질병을 예방하고 치료하는 것이 중요하다는 것이다. 그러므로 GMI는 한번 가면 다시는 돌아올 수 없는 길임으로, 적용 전 많은 연구와 숙고가 필요하다.

제시문을 활용하면서도 자신의 독창적인 생각을 내보인 점이 탁월하다. 제시문 (나)의 경우 자연의 다양성과 조화보다는 인간이 자연을 이용하는 권리를 강조한 글이다. 이런 점을 잘 읽어내지 못해서 아쉽다.