<학생 답안 예시 및 첨삭>

[문항 (가)]

[문제 1]

#논제1

가홍이가 경로 1을 택할 경우 40km 를 시속 50km/h 로 달리므로 연비 $f(V_1) = 16 - \frac{1}{5} \times 30 = 10$ (km/L) 이다 따라서 가홍이가 경로 1을 택할경우 $4 \times 1500 = 6000$ 원이 필요하다.

경로 2를 택할경우 2가지로 나뉠수 있는데, ① 속력 $V_2 < 24$ 인경우 유료도로를 사용하므로 그 비용을 추가 해야 한다 $f(V_2) = 16 - \frac{1}{5}|180 - V_2|$ 이므로 48km에는 $\frac{48}{f(V_2)}$ L가 필요한다

동행료를 반드시 지불하는 것은 아님

∴ $6000 > \frac{48}{f(V_2)} \times 1500 + 1000$ $f(V_2) > 14.4$

∴ $72 < V_2 < 88$ 이다 처음 $V_2 < 24$ 라는 전제에 맞지 않으므로 이경우는 성립하지 않는다

동행료를 지불하면서 비용이 적게 들기 위한 속도의 범위.

② $V_2 \geq 24$ 유료도로를 사용하지 않으므로 $\frac{48}{f(V_2)} \times 1500 < 6000$ → $f(V_2) > 1$

$f(V_2) > 12$

하지만 이 경우 2시간 이만이 걸리므로 동행료를 지불하면서 비용이 적게 드는 경우는 없다.

∴ $5 < V_2 < 155$ 처음전제에의해 $24 < V_2 < 155$ 가 성립하게 된다.

∴ $24 < V_2 < 155$ (km/h) 이다

#논제 2 가홍이가 오후5시에 A지점을 통과할경우 유료도로를 반드시 사용하게 되므로

$6000 > \frac{48}{f(V_2)} \times 1500 + 1000$ 이다

∴ $f(V_2) > 14.4$

$16 - \frac{1}{5}|180 - V_2| > 14.4$

$-\frac{1}{5}|180 - V_2| > -1.6$

$|180 - V_2| < 8$

$72 < V_2 < 88$

∴ $72 < V_2 < 88$ (km/h) 이다

비용이 6000원 보다 적게 들려면 연료비 또한 6000원 미만이 들어야 하고, 따라서 연비는 12 km/ℓ 보다 커야한다. 이 경우 속력은 60 km/h 보다 커야하므로, B 지점까지 1시간 이내에 도착한다. 따라서 동행료를 지불하는 경우만 비용이 6000원 미만일수 있다.

논제 1 $\boxed{5}$ 논제 2 $\boxed{6}$

[문제 1] [논제 1]

경로 1을 통해 갈 경우의 비용: $f(v_1)=16-\frac{1}{5}|80-50|=10$

∴ 40km를 가려면 4L가 필요하므로 비용은 6000원

i) 7시 전에 도착하는 경우 ($\frac{48}{v_2}<2$ $24<v_2$)

필요한 휘발유양은 $\frac{48}{16-\frac{1}{5}|80-v_2|}$ 휘발유값은 $\frac{48}{16-\frac{1}{5}|80-v_2|}\times 1500$

$\frac{48}{16-\frac{1}{5}|80-v_2|}\times 1500<6000$, $16-\frac{1}{5}|80-v_2|>12$ $\frac{1}{5}|80-v_2|<4$ $|80-v_2|<20$

∴ $-20<80-v<20$ $60<v_2<100$

ii) 7시 이후에 도착하는 경우 ($v_2<24$) ← 통행료를 지불하는 경우와 그렇지 않는 경우로 나누어 기술하세요

필요한 휘발유양은 $\frac{48}{16-\frac{1}{5}|80-v_2|}$ 휘발유값은 $\frac{48}{16-\frac{1}{5}|80-v_2|}\times 1500$

총비용은 $\frac{48}{16-\frac{1}{5}|80-v_2|}\times 1500+1000$ 이 6000보다 작으므로

← 통행료를 반드시 지불하지를 않는다

$\frac{48}{16-\frac{1}{5}|80-v_2|}\times 1500+1000<6000$ $16-\frac{1}{5}|80-v_2|>\frac{72}{5}$ $\frac{8}{5}>\frac{1}{5}|80-v_2|$

∴ $-8<80-v_2<8$ $72<v_2<88$은 ($v_2<24$)에 포함되지 않으므로

$60<v_2<100$ 이다.

→ 총비용이 6000보다 작으려면 연료비만 생각해도 6000원보다 작아야 한다. 이 경우 속력은 60 Km/h 보다 빨라야 한다.

$\boxed{9}$

[논제 2]

오후 5시에 출발하면 추가로 1000원을 내야 한다

∴ $\frac{48}{16-\frac{1}{5}|80-v_2|}\times 1500+1000<6000$ 이므로 $72<v_2<88$ 따라서 B지점에 1시간 이내에 도착하게 된다. 따라서 통행료를 지불하지 않는다.

근거를 보다 상세히 설명하세요

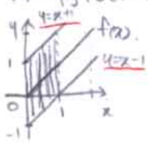
$\boxed{6}$

[문항 (나)]

[문제 2]

(논제 1)

$D_f = \{g \mid d(f,g) \leq, g \in P\}$ 이다 $|f(x) - g(x)|$의 최댓값이 1보다 작거나 같으려면 g(x)가 1차함수이므로 (x, g(x))가 연결 그림처



색칠된 부분 사이에 존재하는 ~~일차함수이면 된다~~ 해야 한다.

$C(D_f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid$ ~~$y = |f(x) - g(x)|$~~, $0 \leq x \leq 1\}$ 이므로 영역 $C(D_f)$의 면적은

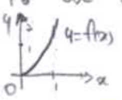
$y = g(x)$, $|x - g(x)| \leq 1$, $g \in P$

으로 평행사변형이다 면적은 $2 \times 1 = 2$이다

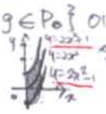
18

(논제 2)

$P_0 = ax$라 하면 $D_f \cap P_0 = \{g \mid d(f, g) \leq 1, g \in P_0\}$ 이다 $f(x) = 2x^2$ 일때 그래프는

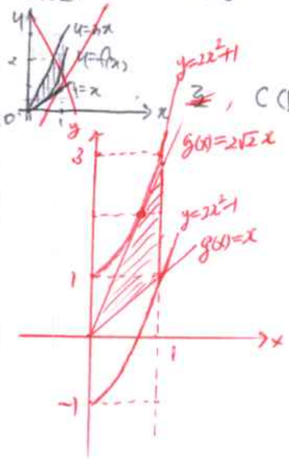


이다 $|f(x) - g(x)| \leq 1$ 이면



색칠한 부분에 g(x)가 있어야 한다

$0 \leq x \leq 1$에서 $|f(x) - g(x)| \leq 1$ 이려면 $g(x) = ax$라 할 때 ~~$C(D_f \cap P_0)$의 면적은~~



~~2~~, $C(D_f \cap P_0)$의 면적은 변곡 그림이 빗금친 삼각형 모양에 ~~$\frac{1}{2} \times 2 \times 1 = 1$~~ 이다.

$\frac{1}{2}(2\sqrt{2} - 1) \times 1 = \frac{2\sqrt{2} - 1}{2}$

※ $g(x) = 2\sqrt{2}x$는 (0,0)을 지나고 $y = 2x^2 + 1$에 접하는 직선이다.

4

[문제 2]

#논제1

논제1의 $C(D_f)$는 $d(f,g) \le 1$를 만족하는 $[0,1]$의 일차함수 $g(x)$의 영역이다

$|f(x)-g(x)|$의 최댓값 ≤ 1

$f(x) \ge g(x)$

$f(x)-g(x) \le 1$

$-g(x) \le 1-x$

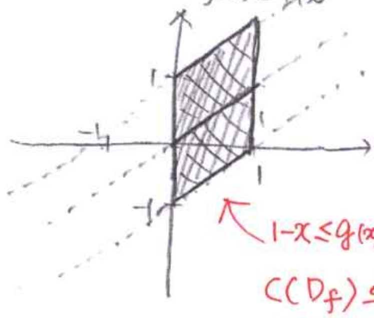
$g(x) \ge x-1$

$f(x) \le g(x)$

$g(x)-f(x) \le 1$

$g(x) \le 1+x$

$\boxed{15}$



∴ $C(D_f)$의 면적 2

$1-x \le g(x) \le 1+x$로 부터 $C(D_f)$의 영역이 어떻게 되는지 논술하세요.

#논제2

$|f(x)-g(x)|$의 최댓값 ≤ 1

$f(x) \ge g(x)$

$f(x)-g(x) \le 1$

$-g(x) \le 1-2x^2$

$g(x) \ge 2x^2-1$

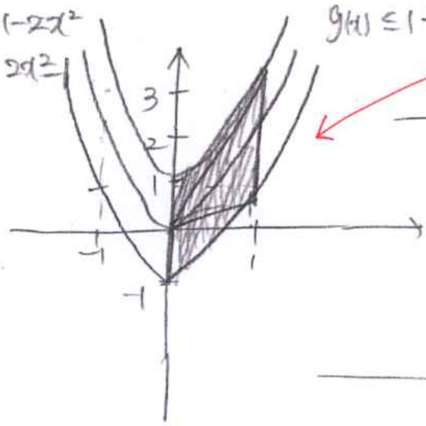
$f(x) < g(x)$

$g(x)-f(x) \le 1$

$g(x) \le 1+2x^2$

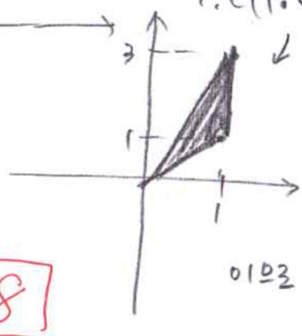
$C(P_0 \cap D_f)$의 영역에 대해 설명을 자세히 하세요.

→ 이 영역이 (D_f)의 영역이다



$2x^2$

∴ $C(f_0 \cap D_f)$의 면적은



이므로 $2 \times 1 \times \frac{1}{2} = 1$

$\boxed{8}$

∴ 1 이다.

[문항 (다)]

[문제 3]

[논제 1] $f(x) = x^3 + ax + b$라 하면,

$f'(x) = 3x^2 + a$

제시문 (ㄱ), (ㄴ)에 의해, $f'(x) = 0$이 서로 다른 두 실수해를 가지려면

$-12a > 0 \quad \therefore a < 0 \cdots ①$

$f'(x)$의 서로 다른 두 실근은 $\sqrt{-\frac{a}{3}}$, $-\sqrt{-\frac{a}{3}}$ 이므로

$f\left(\sqrt{-\frac{a}{3}}\right) f\left(-\sqrt{-\frac{a}{3}}\right) < 0$

$\left(-\frac{a}{3}\sqrt{-\frac{a}{3}} + a\sqrt{-\frac{a}{3}} + b\right)\left(\frac{a}{3}\sqrt{-\frac{a}{3}} - a\sqrt{-\frac{a}{3}} + b\right) < 0$

이를 정리하면, $\frac{4}{27}a^3 + b^2 < 0 \cdots ②$

②는 ①이 성립하는 경우에만 성립하므로 ①②를 종합하면

$\therefore 27b^2 + 4a^3 < 0$ 이 구하는 필요충분조건임을 알 수 있다.

(16)

[논제 2] 제시문 (ㄱ)에 의해,

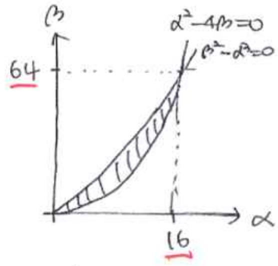
$f(x) = ax^2 + bx + c$가 실수해를 갖지 않기 위한 필요충분조건은

$af\left(-\frac{b}{2a}\right) > 0, \quad \therefore b^2 - 4ac < 0$

이에 의해, 집합 A의 (α, β)는 $\alpha^2 - 4\beta < 0$ 만족

[논제 1]의 결과에 의해, 집합 B의 (α, β)는 $\beta^2 - \alpha^3 < 0$ 만족. 그런데 $\alpha > 0$ 이어야 하므로

$A \cap B$이 나타내는 영역은 그림의 빗금친 부분이다.



(18)

따라서

구하는 면적은 $\int_0^{16} \left(x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{4}x^2\right) dx = \cancel{204.8}\ \frac{1024}{15}$ 이다.

[문제 3]

[논제1] $x^3+ax+b=0$

'방정식 $f(x)=0$이 서로 다른 두 실수 해 x_1, x_2를 갖고, $f(x_1)f(x_2)<0$ 이다'

$f(x)=x^3+ax+b=0$

$f'(x)=3x^2+a=0$ 이 두 실수해를 가져야 하므로 $\underline{a<0}$ 이다. …①

$3x^2=-a$

$x^2=-\frac{a}{3}$

$x=\pm\sqrt{-\frac{a}{3}}$ 이고 $x_1=+\sqrt{-\frac{a}{3}}$ $x_2=-\sqrt{-\frac{a}{3}}$ 로 두고 $f(x_1)f(x_2)<0$ 임을 구하면

$f(x)=x^3+ax+b=0$

$f(x_1)=\left(\sqrt{-\frac{a}{3}}\right)^3+a\left(\sqrt{-\frac{a}{3}}\right)+b=0$

$f(x_2)=\left(\sqrt{-\frac{a}{3}}\right)^3-a\left(\sqrt{-\frac{a}{3}}\right)+b=0$

($f(x_1)f(x_2)<0$ 이어야 서로 다른 세 실근을 갖게 된다)

$\therefore f(x_1)f(x_2)=27b^2+4a^3<0$ …②

②는 ①이 ~~[illegible]~~ 성립하는 경우에만 성립하므로 구하는 필요충분조건은 $27b^2+4a^3<0$ 이다.

11

[논제2] 이차 방정식이 실수해를 갖지 않을조건 $b^2-4ac<0$

삼차 방정식이 서로다른 세 실수해를 갖을조건 $f'(x)=0$ 두실수해 x_1, x_2 갖고 $f(x_1)f(x_2)<0$

㉠ $x^2+\alpha x+B$가 실수해를 갖지 않으려면 $\alpha^2-4B<0$

$\therefore \underline{\alpha^2<4B}$ …①

㉡ $f(x)=x^3-3\alpha x+2B=0$ 실수 해를 갖을 조건 $f'(x)=3x^2-3\alpha=0$

$=3(x^2-\alpha)=0$ 이 서로 다른 두 실수해를 가져야 하므로 우선 $\underline{\alpha>0}$ 이다, ②

$\cancel{=3(x-\sqrt{\alpha})(x+\sqrt{\alpha})=0}$ 또 $f(\sqrt{\alpha})f(-\sqrt{\alpha})<0$ 이어야 하므로 $\underline{\beta^2-\alpha^3>0}$ …③

$\therefore \cancel{x=\sqrt{\alpha}, -\sqrt{\alpha}\ (\alpha>0)}$ 이어야 한다.

㉠∩㉡의 영역은 $\alpha^2-4B<0$ $\cancel{x=\sqrt{\alpha}, -\sqrt{\alpha}}$를 만족하는 범위이다. 따라서 ①②③을 만족하는 영역의 넓이는

$(\alpha-2\sqrt{B})(\alpha+2\sqrt{B})$ $\cancel{\to \alpha=x^2 \text{ 이고}}$ $\int_0^{16}\left(x^{3/2}-\frac{1}{4}x^2\right)=\frac{1024}{15}$ 이다.

$\cancel{\alpha^2-4B<0 \text{ 에 대입하면}}$ $\cancel{x^4-4B<0}$ 이다.

$\cancel{(x^2-2\sqrt{B})(x^2+2\sqrt{B})<0}$ 이다.

4