[문항 3]은 수리논술 문제 출제 예정이며, 고교교육과정 범위 내의 수리적 혹은 과학적 원리를 제시하는 지문을 활용하여, 문제를 올바르게 분석하고 해결하는지를 평가하고 측정함.
고등학교 교과과정(수학 I 혹은 미적분과 통계기본) 범위 안에서 출제

나. 출제 방향

1) 고교 교과서에 기반한 고교 과정 내의 문제를 출제한다.
2) 제시문에 대한 독해력과 분석력, 제시문을 바탕으로 제시된 문제를 해결하는 사고력과 적용하는 능력, 생각하는 바를 논리적으로 전개하는 논술능력을 측정하는 문제를 출제한다.

다. 출제 유형

1) 지문제시형 문제를 출제한다.
2) 제시문은 고교 교과서(“수학”, “수학 I”, ”수학 II“, "미적분과 통계기본”, “적분과 통계”)의 다음을 참조하여 구성한다.

[문항 1]

수학 : 부등식의 성질 (산술평균과 기하평균), 이차 방정식 (인수분해)

수학 I : 여러 가지 수열의 합 (부분분수 등)

[문항 2]

수학 : 집합과 명제

수학 I : 다항함수의 미분 (미분계수의 정의), 다항함수의 적분 (정적분의 기본정리), 함수의 극한과 연속

3) 수리논술 문제는 지문에 대한 정확한 독해력, 내용의 분석 능력, 제시된 지식을 이용하여 문제를 해결하는 능력 등을 측정하는 문제를 출제한다. 점수는 60점이며 변별력을 위해 2개의 문항으로 구성하되, 각 문항은 2개의 소 논제로 구성한다.
4) 약 70~80분 이내에 작성하도록 한다.

라. 〈문항 1〉 해설

▣ 출제 의도

A. [문항1] 제시문을 통해 기본적인 수열로 이루어진 상황을 이해하도록 하였으며, 제시문에 기술된 조건을 통해 최소화해야 하는 양을 수학적으로 모델링하고 이를 논리적으로 해결할 수 있는 문제해결능력을 가지고 있는지 평가할 수 있도록 하였다.

B. [문항2] 제시문을 통해 함수의 연속성, 미분 가능성 등을 이해하고, 이를 바탕으로 특정한 성질을 만족하는 함수의 일반적인 형태를 찾는 문제에 적용할 수 있는지를 평가할 수 있도록 하였다. 그리고 이 과정에서 수학적 귀납법을 이해하고 적용할 수 있는지 평가할 수 있도록 하였다.

C. 궁극적으로 고등학교 수학 문제 제시를 통해 대학 진학 후 이과과목을 수강할 수 있을 정도의 기초적인 능력을 갖추고 있는지를 측정하고자 하였다.

▣ 평가 기준

● 기본사항

- 각 논제를 각각 가중치를 가지고 채점하되 총점으로 환산하여 총괄 평가. 수리논술에서는 **배당된 점수 범위 내에서 등급이 아닌 점수로 표기하여 합산함.**
- 문제의 의도에서 완전히 이탈했거나 각 논제와 전혀 다른 내용을 서술한 경우는 0점으로 채점한다.

● 각 문항 별 채점 기준

[문항 1]

(논제 1) (10점)

두 사람이 P_k 휴게소에서 만난다고 가정하면, A가 사용하는 휘발유 양은 $(22-\frac{32}{1\cdot 2})+(22-\frac{32}{2\cdot 3})+\cdots+(22-\frac{32}{(k-1)\cdot k})$ 가 되고, 이를 정리하면 $22(k-1)-32((\frac{1}{1}-\frac{1}{2})+(\frac{1}{2}-\frac{1}{3})+\cdots+(\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}))=22k+\frac{32}{k}-54$이다.	3점
B가 사용하는 휘발유 양은 $(20+1)+(20-1)+\cdots+(20+(-1)^{k+1})$ $\left[=\sum_{i=20}^{k+1}(20+(-1)^i)\right]$ 이를 정리하면 $20(20-k)+a,\ a=\frac{1}{2}(1-(-1)^k)$ $\left[=\begin{cases}1 & k\text{ 홀수}\\ 0 & k\text{ 짝수}\end{cases}\right]$가 된다.	3점
따라서 두 사람이 사용한 휘발유의 합은 $346+2(k+\frac{16}{k})+a$ 가 되고	2점
가운데 항은 $k=\frac{16}{k}$, 즉, $k=4$에서 최소가 된다. 이 경우 $a=0$이 되어 모든 k에 대해 최소가 됨을 알 수 있다. 따라서 P_4에서 만나면 두 사람이 사용하는 휘발유의 총량을 최소화할 수 있다.	2점

(논제 2) (15점)

두 사람이 P_k휴게소에서 만난다고 가정하면, A가 걸리는 시간은 $3(1+2+\cdots+(k-1))=3k(k-1)/2$가 되고	3점
B가 걸리는 시간은 $(2m+(2m-1)+\cdots+(k+1))=(k+2m+1)(2m-k)/2=(2m(2m+1)-k-k^2)/2$이 된다.	3점
같은 시간이 걸려서 만나게 되면 두 사람이 가장 빨리 만나게 되므로 $3k(k-1)/2=(2m(2m+1)-k-k^2)/2$을 만족하는 k를 찾는다.	3점
식을 정리하면 $3k^2-3k=2m(2m+1)-k-k^2$, 즉 $2k^2-k-m(2m+1)=0$이 되므로 $(k+m)(2\mathrm{k}-(2m+1))=0$에서 $k=m+0.5$를 얻는다.	3점
만나는 시간을 같게 하는 k가 자연수가 아니므로, P_{m}과 $P_{\mathrm{m+1}}$에서 만나는 시간을 고려해야 한다. P_{m}에서 만나는 경우는 더 많이 걸리는 B가 걸리는 시간이 $m(3m+1)/2$분이고 $P_{\mathrm{m+1}}$에서 만나는 경우는 더 많이 걸리는 A가 걸리는 시간이 $m(3m+3)/2$분이므로 P_{m}에서 만나야 가장 빨리 만날 수 있다.	3점

※ 주의사항 : m, m+1만 구해서 답을 쓴 경우, 논리적으로 타당한 근거를 제시했으면 만점, 그렇지 않고 근거가 없이 결론만 구했으면 0점으로 처리한다.

[문항 2]

(논제 1) (15점)

$f\in A$ 이므로 $f(2a)=2f(a)+a^2$ 이고 $f(2a+h)=2f(a+\frac{h}{2})+(a+\frac{h}{2})^2$ 이다. 따라서 $\frac{f(2a+h)-f(2a)}{h}=\frac{f(a+h/2)-f(a)}{h/2}+a+h/2$ 이다.	5점
그런데, 함수 f가 $x=a$에서 미분가능하므로 극한값 $\lim_{h\to0}\frac{f(2a+h)-f(2a)}{h}$ 가 존재한다. 그러므로 f는 $x=2a$에서 미분가능하고, $f'(2a)=f'(a)+a$임을 알 수 있다.	2점
$n=1$인 경우, g는 집합 B의 원소이므로, $g(x)=g(2\frac{x}{2})=g(\frac{x}{2})+\frac{x}{2}$가 된다. 즉, $g(x)=g(\frac{x}{2^1})+(1-\frac{1}{2^1})x$이 되어 $n=1$일 때 성립한다.	3점
자연수 k에 대해, $n=k$일 때 성립한다고 가정하자. 즉, $g(x)=g\left(\frac{x}{2^k}\right)+\left(1-\frac{1}{2^k}\right)x$ 라고 가정하자. g는 집합 B의 원소이므로 $g(\frac{x}{2^k})=g(2\frac{x}{2^{k+1}})=g(\frac{x}{2^{k+1}})+\frac{x}{2^{k+1}}$ 이 성립한다. 그러므로 $g(x)=g\left(\frac{x}{2^k}\right)+\left(1-\frac{1}{2^k}\right)x=g(\frac{x}{2^{k+1}})+\frac{x}{2^{k+1}}+\left(1-\frac{1}{2^k}\right)x=g(\frac{x}{2^{k+1}})+\left(1-\frac{1}{2^{k+1}}\right)x$이 된다. 즉, $n=k+1$일 때 $g(x)=g\left(\frac{x}{2^n}\right)+\left(1-\frac{1}{2^n}\right)x$ 가 성립한다.	3점
따라서, 모든 자연수 n에 대해 $g(x)=g\left(\frac{x}{2^n}\right)+\left(1-\frac{1}{2^n}\right)x$이다.	2점

※ 주의사항 : 첫 번째 항목에서 $f(2a+2h)=2f(a+h)+(a+h)^2$을 이용해 논증하는 경우도 올바르게 계산하면 맞는 답안임.

두 번째 항목에서 $f'(2a)=f'(a)+a$이 없어도 감점 없음. (미분가능함만 보이면 됨.)

(논제 2) (20점)

함수 g가 C의 원소라고 하자. 그러면, 제시문 (바)에 의해 g는 집합 B의 원소이고 x=0에서 연속이다. $\lim_{n\to\infty}\frac{x}{2^n}=0$이고 함수 g가 $x=0$에서 연속이므로 제시문 (마)에 의해 $\lim_{n\to\infty}g\left(\frac{x}{2^n}\right)=g(0)$이다.	4점
따라서 $\lim_{n\to\infty}\left\{g\left(\frac{x}{2^n}\right)+\left(1-\frac{1}{2^n}\right)x\right\}=g(0)+x$이다. 그러므로, $g(x)=x+g(0)$이다.	4점
반대로 함수 $g(x)=x+c$라고 하자. (c는 상수.) g는 연속함수이다. 그리고 $g(2x)=2x+c=(x+c)+x=g(x)+x$이므로 함수 g는 집합 C의 원소이다. 즉, C의 원소는 $x+c$ 형태로 표현되는 모든 함수이다.	2점
함수 f가 D의 원소라고 하자. 논제 1의 풀이를 통해 모든 실수 x에 대해 $f'(2x)=f'(x)+x$가 성립함을 확인하였다. f'은 $x=0$에서 연속이므로 f'은 집합 C의 원소이다. 즉, $f'(x)=x+c$이다. (c는 상수)	4점
그러므로 $f(x)=\frac{1}{2}x^2+cx+k$이다. 그런데 함수 f는 집합 A의 원소이므로, $f(0)=2f(0)+0$이 성립한다. 따라서 $f(0)=0$이고, 이로부터 $k=0$임을 알 수 있다. 따라서 어떤 실수 c에 대해 $f(x)=\frac{1}{2}x^2+cx$이다.	4점
반대로 $f(x)=\frac{1}{2}x^2+cx$라고 하자. (c는 상수) f는 미분가능하고, 도함수가 연속이다. 또한, $f(2x)=\frac{1}{2}(2x)^2+c(2x)=2\left(\frac{1}{2}x^2+cx\right)+x^2=2f(x)+x^2$ 이므로, 함수 f는 집합 D의 원소이다. 즉, 집합 D의 원소는 $\frac{1}{2}x^2+cx$ 형태로 표현되는 모든 함수이다.	2점

▣ 예시 답안

가. 문항 1

1) 논제 1

두 사람이 P_k휴게소에서 만난다고 가정하면 A가 사용하는 휘발유 양은

$$(22-\frac{32}{1\cdot 2})+(22-\frac{32}{2\cdot 3})+\cdots+(22-\frac{32}{(k-1)\cdot k}) \quad \left[=\sum_{i=1}^{k-1}\left(22-\frac{32}{i(i+1)}\right)\right]$$

가 되고, 이를 부분분수로 나타내어 정리하면

$$22(k-1)-32((\frac{1}{1}-\frac{1}{2})+(\frac{1}{2}-\frac{1}{3})+\cdots+(\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k})) \quad \left[=22(k-1)-32\sum_{i=1}^{k-1}\left(\frac{1}{i}-\frac{1}{i+1}\right)\right]=22k+\frac{32}{k}-54$$

이다.

B가 사용하는 휘발유 양은

$$(20+1)+(20-1)+\cdots+(20+(-1)^{k+1}) \quad \left[=\sum_{i=k+1}^{20}(20+(-1)^{i})\right]$$

이를 정리하면

$$20(20-k)+a,\ a=\frac{1}{2}(1-(-1)^{k}) \quad \left[=\begin{cases}1 & k\text{ 홀수}\\ 0 & k\text{ 짝수}\end{cases}\right]$$

가 된다.

따라서 두 사람이 사용한 휘발유의 합은

$346+2(k+\frac{16}{k})+a$ 가 되고 가운데 항은 $k=\frac{16}{k}$, 즉, $k=4$에서 최소가 된다.

이 경우 $a=0$이 되어 모든 k에 대해 최소가 됨을 알 수 있다.
따라서 P_4에서 만나면 두 사람이 사용하는 휘발유의 총량을 최소화할 수 있다.

2) 논제 2

두 사람이 P_k 휴게소에서 만난다고 가정하면

A가 걸리는 시간은
$3(1+2+\cdots+(k-1))=3k(k-1)/2$
가 되고
B가 걸리는 시간은
$(2m+(2m-1)+\cdots+(k+1))=(k+2m+1)(2m-k)/2=(2m(2m+1)-k-k^2)/2$
이 된다.

서로 같은 시간이 걸려서 만나게 되면 두 사람이 가장 빨리 만나게 되므로
$3k(k-1)/2=(2m(2m+1)-k-k^2)/2$
을 만족하는 k를 찾는다. 식을 정리하면
$3k^2-3k=2m(2m+1)-k-k^2$, 즉
$2k^2-k-m(2m+1)=0$이 되므로 $(k+m)(2k-(2m+1))=0$에서 $k=m+0.5$를 얻는다.

만나는 시간을 같게 하는 k가 자연수가 아니므로, P_m과 P_{m+1}에서 만나는 시간을 고려해야 한다.
P_m에서 만나는 경우는 더 많이 걸리는 B가 걸리는 시간이 $m(3m+1)/2$분이고
P_{m+1}에서 만나는 경우는 더 많이 걸리는 A가 걸리는 시간이 $m(3m+3)/2$분이므로
P_m에서 만나야 가장 빨리 만날 수 있다.

나. 문항 2

1) 논제 1

i) $f \in A$이므로 $f(2a)=2f(a)+a^2$ 이고 $f(2a+h)=f(2(a+\frac{h}{2}))=2f(a+\frac{h}{2})+(a+\frac{h}{2})^2$ 이다. 따라서

$$\frac{f(2a+h)-f(2a)}{h}=2\frac{f(a+h/2)-f(a)}{h}+\frac{ah+h^2/2}{h}=\frac{f(a+h/2)-f(a)}{h/2}+a+h/2$$

이다. 그런데, 함수 f가 $x=a$에서 미분가능하므로 극한값 $\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h/2)-f(a)}{h/2}$ 가 존재하고,

극한값 $\lim_{h\to 0}(a+h/2)$ 도 존재한다. 따라서 극한값 $\lim_{h\to 0}\frac{f(2a+h)-f(2a)}{h}$ 가 존재한다.

그러므로 f는 $x=2a$에서 미분가능하고, $f'(2a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(2a+h)-f(2a)}{h}=f'(a)+a$임을 알 수 있다.

ii) 수학적 귀납법

$n=1$인 경우, g는 집합 B의 원소이므로, $g(x)=g(2\frac{x}{2})=g(\frac{x}{2})+\frac{x}{2}$가 된다.

즉, $g(x)=g(\frac{x}{2^1})+(1-\frac{1}{2^1})x$이 되어 $n=1$일 때 성립한다.

자연수 k에 대해, $n=k$일 때 성립한다고 가정하자. 즉, $g(x)=g\left(\frac{x}{2^k}\right)+\left(1-\frac{1}{2^k}\right)x$라고 가정하자.

g는 집합 B의 원소이므로 $g(\frac{x}{2^k})=g(2\frac{x}{2^{k+1}})=g(\frac{x}{2^{k+1}})+\frac{x}{2^{k+1}}$ 이 성립한다. 그러므로

$$\begin{aligned} g(x)&=g\left(\frac{x}{2^k}\right)+\left(1-\frac{1}{2^k}\right)x \\ &=g(\frac{x}{2^{k+1}})+\frac{x}{2^{k+1}}+\left(1-\frac{1}{2^k}\right)x \\ &=g(\frac{x}{2^{k+1}})+\left(1-\frac{1}{2^{k+1}}\right)x \end{aligned}$$

이 된다. 즉, $n=k+1$일 때 $g(x)=g\left(\frac{x}{2^n}\right)+\left(1-\frac{1}{2^n}\right)x$가 성립한다.

따라서, 수학적 귀납법에 의해 모든 자연수 n에 대해 $g(x)=g\left(\frac{x}{2^n}\right)+\left(1-\frac{1}{2^n}\right)x$이다.

2) 논제 2

함수 g가 C의 원소라고 하자. 그러면, 제시문 (바)에 의해 g는 집합 B의 원소이고 $x=0$에서 연속이다.
그러면 제시문 (다)에 의해 실수 x에 대해 다음이 성립한다.

모든 자연수 n에 대해 $g(x)=g\left(\frac{x}{2^n}\right)+\left(1-\frac{1}{2^n}\right)x$이다.

그런데 $\lim_{n\to\infty}\frac{x}{2^n}=0$이고 함수 g가 $x=0$에서 연속이므로 제시문 (마)에 의해 $\lim_{n\to\infty} g(\frac{x}{2^n})=g(0)$이다.

따라서 $\lim_{n\to\infty}\left\{g(\frac{x}{2^n})+\left(1-\frac{1}{2^n}\right)x\right\}=g(0)+x$이다.

그러므로, $g(x)=x+g(0)$이다.
반대로 함수 $g(x)=x+c$라고 하자. (c는 상수) g는 연속함수이다. 그리고 $g(2x)=2x+c=(x+c)+x=g(x)+x$ 이므로 함수 g는 집합 C의 원소이다. 즉, C의 원소는 $x+c$ 형태로 표현되는 모든 함수이다.

함수 f가 D의 원소라고 하자. 그러면 (사)에 의해 f는 집합 A의 원소이고, f는 모든 점에서 미분가능하다.
그런데, 논제 1의 풀이를 통해 모든 실수 x에 대해 $f'(2x)=f'(x)+x$가 성립함을 확인하였다.
즉, 도함수 f'은 집합 B의 원소이다. 또한 집합 D의 정의에 의해 f'은 $x=0$에서 연속이므로 f'은 집합 C의 원소이다.

즉, $f'(x)=x+c$이다. (c는 상수) 그러므로 $f(x)=\frac{1}{2}x^2+cx+k$이다. 그런데 함수 f는 집합 A의 원소이므로,

$f(0)=2f(0)+0$이 성립한다. 따라서 $f(0)=0$이고, 이로부터 $k=0$임을 알 수 있다. 따라서 어떤 실수 c에 대해

$f(x)=\frac{1}{2}x^2+cx$이다.

반대로 $f(x)=\frac{1}{2}x^2+cx$라고 하자. (c는 상수) f는 미분가능하고, 도함수가 연속이다.

또한, $f(2x)=\frac{1}{2}(2x)^2+c(2x)=2(\frac{1}{2}x^2+cx)+x^2=2f(x)+x^2$ 이므로, 함수 f는 집합 D의 원소이다.

즉, 집합 D의 원소는 $\frac{1}{2}x^2+cx$ 형태로 표현되는 모든 함수이다.