나. 출제 방향

1) 제시문은 고교 교과서("수학 II", "적분과 통계", "미적분과 통계기본")의 내용을 참조하여 구성한다.

2) 지문에 대한 정확한 독해력, 내용의 분석 능력, 고교 교육과정에서 얻을 수 있는 지식을 이용하여 문제를 해결하는 능력 등을 측정하는 문제를 출제한다. 만점은 200점이며 2개의 문항으로 구성하되, 각각 2개의 논제로 구성한다.

3) 60분 이내에 작성하도록 한다.

다. 수리 문항 (가), (나) 해설

▣ 출제 의도

A. 수리문항 (가)는 간단한 계산 과정을 차분히 정리할 수 있는지와 기본적인 그래프를 그릴 수 있는지를 측정하려고 하였고, 동시에 중간값 정리를 적절히 이용할 수 있는지를 확인하려고 하였다.

B. 수리문항 (나)는 일상생활에서 흔히 나타나는 상황을 수리적으로 이해하는 문제를 출제했다. 문제 해결을 위하여 고교교육과정에서 배우는 확률변수의 독립, 평균과 표준편차, 수열의 합, 정규분포에 대한 학교 수업 내용을 정확히 이해한 학생들은 충분히 풀 수 있는 수준의 문제를 출제하였다.

C. 궁극적으로 고등학교 수학 문제 제시를 통해 대학 진학 후 이과과목을 수강할 수 있을 정도의 기초적인 능력을 갖추고 있는지와 자신의 사고를 얼마나 체계적으로 설명할 수 있는지를 측정하고자 하였다.

▣ 평가 기준

● 기본사항

- 각 논제를 각각 가중치를 가지고 채점하되 총점으로 환산하여 총괄 평가. 수학논술에서는 **배당된 점수 범위 내에서 등급이 아닌 점수로 표기하여 합산함.**
- 각 논제를 채점위원 2인이 각각 1차 채점을 하고, 두 위원의 1차 채점 결과가 논제 총점의 25% 이상 차이가 날 경우 채점위원이 공동 합의하에 2차 채점을 진행한다. 2차 채점에서 위원간의 조정이 이루어지지 않을 경우 3차 채점을 실시한다. 3차 채점은 출제위원을 포함한 새로운 채점위원 2인이 채점하되 1차 채점의 상위와 하위 점수 사이의 점수를 부여한다.
- 논술 답안에 수험생의 신원을 알릴만한 요소가 있을 때는 0점으로 채점한다.

● 세부 사항

- 문제의 의도에서 완전히 벗어났거나 각 논제와 전혀 다른 내용을 서술한 경우는 0점으로 채점한다.
- "예시답안"과 비슷하더라도 논술의 완결성에 대하여 아래 항목 "논제별 채점기준"을 통해 얻게 되는 점수의 최대 10%까지 채점자가 감점할 수 있다.

● 논제별 채점기준

[수리 문항 (가)]

논제 1. (40점)

답안	점수
주어진 다항함수 $f(x)=x^3+ax$를 식 $f(x+y)-f(x)=2yf'(x)$에 대입하여 x에 관한 다음 방정식을 얻을 수 있다. $$y(3x^2-3xy-y^2+a)=0$$	10점
$y=0$인 경우는 모든 실수 x에 대하여 성립함을 알 수 있다.	5점
$y\neq0$인 경우에는 양변을 y로 나누어 x에 관한 이차 방정식 $$3x^2-3xy-y^2+a=0 \ (*)$$ 얻을 수 있다. $(*)$의 판별식을 D라 하면, $D=21y^2-12a$이다.	10점
이차 방정식이 실근을 갖기 위해서는 $D\geq0$이어야 하므로, 모든 실수 y에 대해 $D=21y^2-12a\geq0$를 만족하는 a를 찾으면 된다.	10점
따라서 $a\leq0$이 된다.	5점

논제 2. (60점)

<table>
<tr><th>답안</th><th>점수</th></tr>
<tr><td>

$g'(x)=(1-x^2)e^{-\frac{x^2-1}{2}}=0$에서 $x=1,\ -1$.

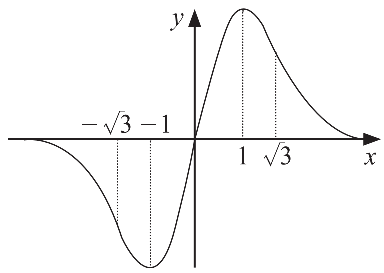
$g''(x)=(x^3-3x)e^{-\frac{x^2-1}{2}}=0$에서 $x=-\sqrt{3},0,\sqrt{3}$.

$\lim_{x\to\infty} g(x)=0$, $\lim_{x\to-\infty} g(x)=0$이므로 점근선은 x축이다.

</td><td>10점</td></tr>
<tr><td>

<table>
<tr><td>x</td><td>$\cdots$</td><td>$-\sqrt{3}$</td><td>$\cdots$</td><td>-1</td><td>$\cdots$</td><td>0</td><td>$\cdots$</td><td>1</td><td>$\cdots$</td><td>$\sqrt{3}$</td><td>$\cdots$</td></tr>
<tr><td>$g'(x)$</td><td>$-$</td><td>$-$</td><td>$-$</td><td>0</td><td>$+$</td><td>$+$</td><td>$+$</td><td>0</td><td>$-$</td><td>$-$</td><td>$-$</td></tr>
<tr><td>$g''(x)$</td><td>$-$</td><td>0</td><td>$+$</td><td>$+$</td><td>$+$</td><td>0</td><td>$-$</td><td>$-$</td><td>$-$</td><td>0</td><td>$+$</td></tr>
<tr><td>$g(x)$</td><td></td><td>변곡점</td><td></td><td>극소값
(최소값)</td><td></td><td>변곡점</td><td></td><td>극대값
(최대값)</td><td></td><td>변곡점</td><td></td></tr>
</table>

</td><td>5점</td></tr>
<tr><td>



</td><td>5점</td></tr>
<tr><td>

(ㄹ)의 조건 2에 의해서 집합 B에 속하는 함수 $h(t)$는 두 개의 극점 $t=x_1$, $x_2(x_1 < x_2)$를 갖는다. (ㄹ)의 조건 3에 의해서 함수 $h(t)$는 $t=x_1$에서 최솟값을 $t=x_2$에서 최댓값을 갖는다. 따라서 임의의 실수 a에 대하여, $h(x_1+a)-h(x_1)\geq 0$, $h(x_2+a)-h(x_2)\leq 0$ $h'(x_1)=0$, $h'(x_2)=0$을 만족한다.

</td><td>10점</td></tr>
<tr><td>

임의의 실수 y에 대하여, 모든 실수에서 정의된 함수 $\overline{h}$를 다음과 같이 정의하자.

$$\overline{h}(t)=h(t+y)-h(t)-2yh'(t).$$

(ㄹ)의 조건 1에 의해 함수 $\overline{h}$는 연속이며

$$\begin{cases} \overline{h}(x_1)=h(x_1+y)-h(x_1)-2yh'(x_1)\geq 0 \\ \overline{h}(x_2)=h(x_2+y)-h(x_2)-2yh'(x_2)\leq 0 \end{cases}$$

임을 알 수 있다. 따라서 중간값의 정리에 의해 $\overline{h}(x)=0$이 되는 점 x가 닫힌 구간 $[x_1, x_2]$에 존재한다. 즉, 모든 실수 y에 대하여

$$h(x+y)-h(x)=2yh'(x)$$

을 만족하는 x가 존재하게 되어 함수 h가 A의 원소임을 알 수 있다. 그러므로 집합 B는 A의 부분집합이 된다.

</td><td>30점</td></tr>
</table>

[수리 문항 (나)]

논제 1. (50점)

답안	점수
Y_i를 $i-1$번째 종류의 스티커가 나온 후 i번째 종류의 스티커가 나올 때 까지 사게 될 초콜릿 봉지수라고 하자. ($i=1, 2, 3, \cdots, 100$) 그러면 Y_i는 기존에 몇 개의 초콜릿 봉지를 구입하였는지와 관계없고, 또한 i번째 종류의 스티커가 나온 후에 사게 될 초콜릿 봉지 수와도 관계없으므로 Y_i들은 서로 독립이다. 100종류의 스티커를 모두 구할 때 까지 사야할 초콜릿 봉지수를 라고 하면 $X=\sum_{i=1}^{100} Y_i$이다.	20점
i종류의 스티커를 모은 상태에서 구입한 초콜릿 봉지에서 새로운 스티커가 나올 확률은 $\frac{100-i}{100}$, 기존에 이미 얻은 스티커가 나올 확률은 $\frac{i}{100}$이므로, $\mathrm{P}(Y_{i+1}=m)=\left(\frac{i}{100}\right)^{m-1}\left(1-\frac{i}{100}\right)$이다.	10점
$S_1=\sum_{m=1}^{\infty} mr^{m-1}(1-r)$라고 하면 $(0<r<1)$, $rS_1=\sum_{m=1}^{\infty} mr^{m}(1-r)=(1-r)\sum_{k=1}^{\infty}(k-1)r^{k-1}=S_1-1$이므로, $S_1=\frac{1}{1-r}$ 이 된다. 이를 이용하여 Y_{i+1}의 평균을 계산하면, $E(Y_{i+1})=\sum_{m=1}^{\infty} m\left(\frac{i}{100}\right)^{m-1}\left(1-\frac{i}{100}\right)=\frac{100}{100-i}$ 을 얻는다. 따라서, $E(X)=\sum_{i=0}^{99} E(Y_{i+1})=\sum_{i=0}^{99}\frac{100}{100-i}=100\sum_{i=1}^{100}\frac{1}{i}=100a_{100}=518.7$이 된다.	20점

논제 2. (50점)

답안	점수
X의 확률분포가 정규분포에 가깝다고 했으므로 X의 표준편차 σ를 계산하여 $\frac{1000-E(X)}{\sigma}$ 의 값이 2.33보다 크다면 불공정하다고 결론을 내릴 것이다. $S_2=(1-r)\sum_{m=1}^{\infty} m^2 r^{m-1}$이라 하면 $(0<r<1)$, $rS_2=\sum_{m=1}^{\infty} m^2 r^m(1-r)=(1-r)\sum_{k=1}^{\infty}(k-1)^2 r^{k-1}=S_2-2S_1+1$이므로 $S_2=\frac{1+r}{(1-r)^2}$ 이 되고, $S_2-S_1^2=\frac{r}{(1-r)^2}$ 이므로 $V(Y_{i+1})=\frac{100i}{(100-i)^2}$ 이다. $V(X)=\sum_{i=0}^{99} V(Y_{i+1})=100^2\sum_{i=1}^{100}\frac{1}{i^2}-100\sum_{i=1}^{100}\frac{1}{i}=100^2 b_{100}-100a_{100}=1.583\times10^4$이 된다.	30점
따라서 X의 표준편차는 200보다 작다. $\frac{1000-E(X)}{\sigma}>\frac{1000-520}{200}=2.4>2.33$이므로, 가홍이는 불공정하다고 결론을 내릴 것이다.	20점

▣ 예시 답안

가. [수리 문항(가)]

1) 논제 1 (40점)

주어진 다항함수 $f(x)=x^3+ax$를 식 $f(x+y)-f(x)=2yf'(x)$에 대입하여 x에 관한 다음 방정식을 얻을 수 있다.

$$y(3x^2-3xy-y^2+a)=0$$

$y=0$인 경우는 모든 실수 x에 대하여 성립함을 알 수 있다.

$y\neq0$인 경우에는 양변을 y로 나누어 x에 관한 이차 방정식

$$3x^2-3xy-y^2+a=0 \ (*)$$

얻을 수 있다. $(*)$의 판별식을 D라 하면, $D=21y^2-12a$이다. 이차 방정식이 실근을 갖기 위해서는 $D\geq0$이어야 하므로, 모든 실수 y에 대해 $D=21y^2-12a\geq0$를 만족하는 a를 찾으면 된다. 따라서 $a\leq0$ 이 된다.

2) 논제 2 (60점)

함수 $y=g(x)=xe^{-\frac{x^2-1}{2}}$ 의 그래프의 개형을 그려보자.

1) $g'(x)=(1-x^2)e^{-\frac{x^2-1}{2}}=0$에서 $x=1,\ -1$.

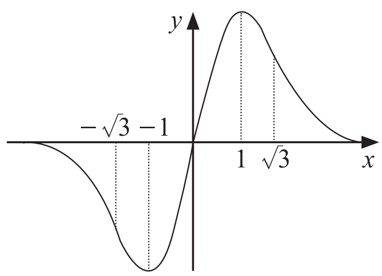
2) $g''(x)=(x^3-3x)e^{-\frac{x^2-1}{2}}=0$에서 $x=-\sqrt{3},\ 0,\ \sqrt{3}$.

따라서 함수 $y=g(x)$의 증가와 감소, 오목과 볼록을 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	$-\sqrt{3}$	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$	$\sqrt{3}$	$\cdots$
$g'(x)$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$
$g''(x)$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$g(x)$		변곡점		극소값 (최소값)		변곡점		극대값 (최대값)		변곡점	

3) $\lim_{x\to\infty} g(x)=0,\ \lim_{x\to-\infty} g(x)=0$이므로 점근선은 x축이다.

따라서 함수 $y=g(x)$의 그래프의 개형은 아래와 같다.



(ㄹ)의 조건 2에 의해서 집합 B에 속하는 함수 $h(t)$는 두 개의 극점 $t=x_1,\ x_2(x_1<x_2)$를 갖는다. (ㄹ)의 조건 3에 의해서 함수 $h(t)$는 $t=x_1$에서 최솟값을 $t=x_2$에서 최댓값을 갖는다. 따라서 임의의 실수 a에 대하여, $h(x_1+a)-h(x_1)\geq 0,\ h(x_2+a)-h(x_2)\leq 0\ h'(x_1)=0,\ h'(x_2)=0$을 만족한다.

임의의 실수 y에 대하여, 모든 실수에서 정의된 함수 $\overline{h}$를 다음과 같이 정의하자.

$$\overline{h}(t)=h(t+y)-h(t)-2yh'(t).$$

(ㄹ)의 조건 1에 의해 함수 $\overline{h}$는 연속이며

$$\begin{cases} \overline{h}(x_1)=h(x_1+y)-h(x_1)-2yh'(x_1)\geq 0 \\ \overline{h}(x_2)=h(x_2+y)-h(x_2)-2yh'(x_2)\leq 0 \end{cases}$$

임을 알 수 있다. 따라서 중간값의 정리에 의해 $\overline{h}(x)=0$이 되는 점 x가 닫힌 구간 $[x_1, x_2]$에 존재한다. 즉, 모든 실수 y에 대하여

$$h(x+y)-h(x)=2yh'(x)$$

을 만족하는 x가 존재하게 되어 함수 h가 A의 원소임을 알 수 있다. 그러므로 집합 B는 A의 부분집합이 된다.

나. [수리 문항(나)]

1) 논제 1. (50점)

Y_i를 $i-1$번째 종류의 스티커가 나온 후 i번째 종류의 스티커가 나올 때까지 사게 될 초콜릿 봉지수라고 하자. $(i=1,2,3,\cdots,100.)$ 그러면 Y_i는 기존에 몇 개의 초콜릿 봉지를 구입하였는지와 관계없고, 또한 i번째 종류의 스티커가 나온 후에 사게 될 초콜릿 봉지 수와도 관계없으므로 Y_i들은 서로 독립이다.

100종류의 스티커를 모두 구할 때 까지 사야할 초콜릿 봉지수를 X라고 하면 $X=\sum_{i=1}^{100} Y_i$이다.

i종류의 스티커를 모은 상태에서 구입한 초콜릿 봉지에서 새로운 스티커가 나올 확률은

$\frac{100-i}{100}$, 기존에 이미 얻은 스티커가 나올 확률은 $\frac{i}{100}$이므로,

$\mathrm{P}(Y_{i+1}=m)=\left(\frac{i}{100}\right)^{m-i}\left(1-\frac{i}{100}\right)$이다.

$S_1=\sum_{m=1}^{\infty} mr^{m-1}(1-r)$라고 하면 $(0<r<1)$,

$rS_1=\sum_{m=1}^{\infty} mr^{m}(1-r)=(1-r)\sum_{k=1}^{\infty}(k-1)r^{k-1}=S_1-1$이므로, $S_1=\frac{1}{1-r}$ 이 된다.

이를 이용하여 Y_{i+1}의 평균을 계산하면,

$E(Y_{i+1})=\sum_{m=1}^{\infty} m\left(\frac{i}{100}\right)^{m-i}\left(1-\frac{i}{100}\right)=\frac{100}{100-i}$ 을 얻는다. 따라서,

$E(X)=\sum_{i=0}^{99} E(Y_{i+1})=\sum_{i=0}^{99}\frac{100}{100-i}=100\sum_{i=1}^{100}\frac{1}{i}=100a_{100}=518.7$이 된다.

2) 논제 2. (50점)

X의 확률분포가 정규분포에 가깝다고 했으므로 X의 표준편차 σ를 계산하여 $\dfrac{1000-E(X)}{\sigma}$ 의 값이 2.33보다 크다면 불공정하다고 결론을 내릴 것이다.

$S_2=(1-r)\sum_{m=1}^{\infty} m^2r^{m-1}$이라 하면 $(0<r<1)$,

$rS_2=\sum_{m=1}^{\infty} m^2r^m(1-r)=(1-r)\sum_{k=1}^{\infty}(k-1)^2r^{k-1}=S_2-2S_1+1$이므로

$S_2=\dfrac{1+r}{(1-r)^2}$ 이 되고, $S_2-S_1^2=\dfrac{r}{(1-r)^2}$ 이므로

$V(Y_{i+1})=\dfrac{100i}{(100-i)^2}$ 이다.

$V(X)=\sum_{i=0}^{99}V(Y_{i+1})=100^2\sum_{i=1}^{100}\dfrac{1}{i^2}-100\sum_{i=1}^{100}\dfrac{1}{i}=100^2b_{100}-100a_{100}=1.583\times10^4$이 된다.

따라서 X의 표준편차는 200보다 작다.

$\dfrac{1000-E(X)}{\sigma}>\dfrac{1000-520}{200}=2.4>2.33$이므로, 가홍이는 불공정하다고 결론을 내릴 것이다.