나. 출제 방향

1) 고교 교과서에 기반한 고교 과정 내의 문제를 출제한다.
2) 제시문에 대한 독해력과 분석력, 제시문을 바탕으로 제시된 문제를 해결하는 사고력과 적용하는 능력, 생각하는 바를 논리적으로 전개하는 논술능력을 측정하는 문제를 출제한다.

다. 출제 유형

1) 지문제시형 문제를 출제한다.
2) 제시문은 고교 교과서(“수학”, “수학 I”, “수학 II”, “미적분과 통계기본”, “적분과 통계”)의 다음을 참조하여 구성한다.

[문항 1]

수학 : 부등식의 성질 (산술평균과 기하평균), 이차 방정식 (인수분해)

수학 I : 여러 가지 수열의 합 (부분분수 등)

[문항 2]

수학 : 집합과 명제 (부분집합, ‘모든’과 ‘어떤’, 명제와 조건), 주기함수

수학 II : 도함수

적분과 통계 : 부정적분과 정적분

3) 수리논술 문제는 지문에 대한 정확한 독해력, 내용의 분석 능력, 제시된 지식을 이용하여 문제를 해결하는 능력 등을 측정하는 문제를 출제한다. 점수는 60점이며 변별력을 위해 2개의 문항으로 구성하되, 각 문항은 2개의 소 논제로 구성한다.
4) 약 70~80분 이내에 작성하도록 한다.

라. 〈문항 2〉 해설

▣ 출제 의도

A. [문항1] 제시문을 통해 기본적인 수열로 이루어진 상황을 이해하도록 하였으며, 제시문에 기술된 조건을 통해 최소화해야 하는 양을 수학적으로 모델링하고 이를 논리적으로 해결할 수 있는 문제 해결능력을 가지고 있는지 평가할 수 있도록 하였다.

B. [문항2] 도함수가 주기함수인 함수들의 일반적인 형태를 찾는 데 있어, 제시문을 이해하고, 이를 활용하는 능력, 적분과 미분의 개념을 적용할 수 있는 능력, 이를 통해 논리적으로 결론을 도출할 수 있는 능력 등의 기본적인 문제 해결능력을 갖추고 있는지 평가할 수 있도록 하였다.

C. 궁극적으로 고등학교 수학 문제 제시를 통해 대학 진학 후 이과과목을 수강할 수 있을 정도의 기초적인 능력을 갖추고 있는지를 측정하고자 하였다.

▣ 평가 기준

● 기본사항

- 각 논제를 각각 가중치를 가지고 채점하되 총점으로 환산하여 총괄 평가. 수리논술에서는 **배당된 점수 범위 내에서 등급이 아닌 점수로 표기하여 합산함.**
- 문제의 의도에서 완전히 이탈했거나 각 논제와 전혀 다른 내용을 서술한 경우는 0점으로 채점한다.

● 각 문항 별 채점 기준

[문항 1] 생략(자연과학, 공학계열 문항 1 과 동일)

[문항 2]

(논제 1) (15점)

$\int_a^{a+T} f(x)dx = \int_a^T f(x)dx + \int_T^{a+T} f(x)dx$	4점
두 번째 적분은 $y=x-T$로 치환하여 적분하면 $\int_T^{a+T} f(x)dx = \int_0^a f(y+T)dy = \int_0^a f(y)dy$가 된다. 여기에서 주기함수의 성질 $f(y+T)=f(y)$를 이용하였다. 따라서 임의의 실수 a에 대해 $\int_a^{a+T} f(x)dx = \int_a^T f(x)dx + \int_0^a f(x)dx = \int_0^T f(x)dx$가 성립한다.	6점
g가 A의 원소이므로 어떤 상수 c가 존재하여 $g(x+c)=g(x)+g(c)$가 모든 x에서 성립한다. 이 식의 양변을 x로 미분하면 $g'(x+c)=g'(x)$가 성립하므로 주기함수가 된다.	5점

※ 주의사항 :

1) 치환적분을 하면 2점, 주기함수의 성질을 이용하여 $\int_0^a f(y+T)dy = \int_0^a f(y)dy$를 논증하면 2점,
$\int_a^T f(x)dx + \int_0^a f(x)dx = \int_0^T f(x)dx$을 결론내리면 2점.

2) $\frac{d}{da}\int_a^{a+T} f(t)dt = f(a+T)-f(a)=0$의 논리를 이용하여 적분값이 a에 무관함을 논증하여 결론을 도출해도 10점으로 인정.

3) 만약 그림을 그려서 논증하려고 하는 경우에 위의 적분과정과 비슷한 과정을 보여주면 전체 10점 중 최대 5점 부여.

(논제 2) (20점)

$F(x+T)=\int_0^{x+T} f(t)dt-\alpha(x+T)=\int_0^x f(t)dt-\alpha x+\int_x^{x+T} f(t)dt-\alpha T$인데, 논제 1에 의해 $\int_x^{x+T} f(t)dt=\int_0^T f(t)dt=\alpha T$이므로 $F(x+T)=F(x)$가 성립한다.	5점
h가 B의 원소라고 하자. 그러면 $h(x)=ax+f(x)-f(0)$를 만족하는 상수 a와 어떤 주기함수 f가 존재한다. h가 실수 전체에서 미분 가능하므로 f 역시 실수 전체에서 미분가능하다. 어떤 0이 아닌 상수 T에 대하여 $f(x+T)=f(x)$가 모든 실수에서 만족한다고 하자. 따라서 $h(x+T)=a(x+T)+f(x+T)-f(0)=ax+f(x)-f(0)+aT=h(x)+aT$가 성립한다. 그런데 $h(T)=aT+f(T)-f(0)=aT$ 이므로 $h(x+T)=h(x)+h(T)$가 모든 실수 x에서 성립함을 알 수 있다. 따라서 h는 A의 원소이다. 즉, B는 A의 부분집합이다.	5점
g가 A의 원소라고 하자. 어떤 0 아닌 상수 T에 대하여 $g(x+T)=g(x)+g(T)$가 모든 x에서 성립하므로 이 식에 $x=0$을 대입하면 $g(T)=g(0)+g(T)$, 즉 $g(0)=0$임을 알 수 있다.	2점
논제 1에서 본 바와 같이 g의 도함수는 주기함수이다. $g'(x+T)=g'(x)$을 모든 x에서 만족시키는 0이 아닌 상수 T가 있다.	2점
$\alpha=\frac{1}{T}\int_0^T g'(x)dx$라고 정의하고 $f(x)=\int_0^x g'(x)dx-\alpha x+f(0)$라고 정의하자. 앞에서 보인 것처럼 $f(x)$는 주기함수이다. 그러면 $g(x)=\int_0^x g'(x)dx=\alpha x+f(x)-f(0)$가 되어, B의 원소가 된다. 즉 A는 B의 부분집합이다.	5점
A는 B의 부분집합이고 동시에 B는 A의 부분집합이므로 $A=B$이다.	1점

▣ 예시 답안

가. 문항 1 : 생략(자연과학, 공학계열 문항 1 과 동일)

나. 문항 2

1) 논제 1

I) $\int_a^{a+T} f(x)dx = \int_a^T f(x)dx + \int_T^{a+T} f(x)dx$

두 번째 적분은 $y=x-T$로 치환하여 적분하면

$\int_T^{a+T} f(x)dx = \int_0^a f(y+T)dy = \int_0^a f(y)dy$가 된다. 여기에서 주기함수의 성질 $f(y+T)=f(y)$를 이용하였다.

따라서 임의의 실수 a에 대해 $\int_a^{a+T} f(x)dx = \int_a^T f(x)dx + \int_0^a f(x)dx = \int_0^T f(x)dx$가 성립한다.

II) g가 A의 원소이므로 어떤 상수 c가 존재하여 $g(x+c)=g(x)+g(c)$가 모든 x에서 성립한다. 이 식의 양변을 x로 미분하면 $g'(x+c)=g'(x)$가 성립하므로 주기함수가 된다.

2) 논제 2

Ⅰ) $F(x+T) = \int_0^{x+T} f(t)dt - \alpha(x+T) = \int_0^x f(t)dt - \alpha x + \int_x^{x+T} f(t)dt - \alpha T$인데,

논제 1에 의해 $\int_x^{x+T} f(t)dt = \int_0^T f(t)dt = \alpha T$이므로 $F(x+T)=F(x)$가 성립한다.

Ⅱ) h가 B의 원소라고 하자. 그러면 $h(x)=ax+f(x)-f(0)$를 만족하는 상수 a와 어떤 주기함수 f가 존재한다. h가 실수 전체에서 미분 가능하므로 f역시 실수 전체에서 미분가능하다. 어떤 0이 아닌 상수 T에 대하여 $f(x+T)=f(x)$가 모든 실수에서 만족한다고 하자.

따라서 $h(x+T)=a(x+T)+f(x+T)-f(0)=ax+f(x)-f(0)+aT=h(x)+aT$가 성립한다.

그런데 $h(T)=aT+f(T)-f(0)=aT$ 이므로 $h(x+T)=h(x)+h(T)$가 모든 실수 x에서 성립함을 알 수 있다.

따라서 h는 A의 원소이다. 즉, B는 A의 부분집합이다.

Ⅲ) g가 A의 원소라고 하자. 어떤 0이 아닌 상수 T에 대하여 $g(x+T)=g(x)+g(T)$가 모든 x에서 성립하므로 이 식에 $x=0$을 대입하면 $g(T)=g(0)+g(T)$, 즉 $g(0)=0$임을 알 수 있다.

논제 1에서 본 바와 같이 g의 도함수는 주기함수이다. $g'(x+T)=g'(x)$을 모든 x에서 만족시키는 0이 아닌 상수 T가 있다.

$\alpha = \frac{1}{T}\int_0^T g'(x)dx$라고 정의하고 $f(x) = \int_0^x g'(x)dx - \alpha x + f(0)$라고 정의하자.

앞에서 보인 것처럼 $f(x)$는 주기함수이다. 그러면 $g(x) = \int_0^x g'(x)dx = \alpha x + f(x) - f(0)$가 되어,

B의 원소가 된다. 즉 A는 B의 부분집합이다.

A는 B의 부분집합이고 동시에 B는 A의 부분집합이므로 $A=B$이다.