가톨릭대학교 2014학년도 수시

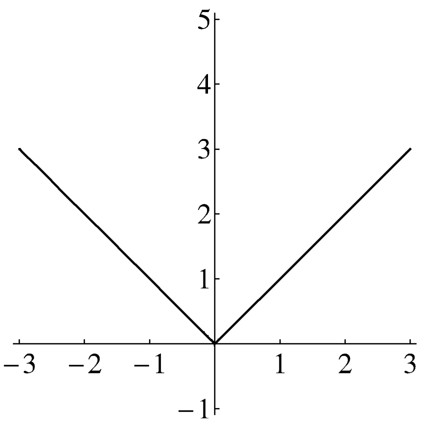
논술고사 문제지 【논술우수자 전형】 (간호학과-자연)

지원학부(과) :　　　　　　　　　　이 름 :　　　　　　　　　　수험번호 :

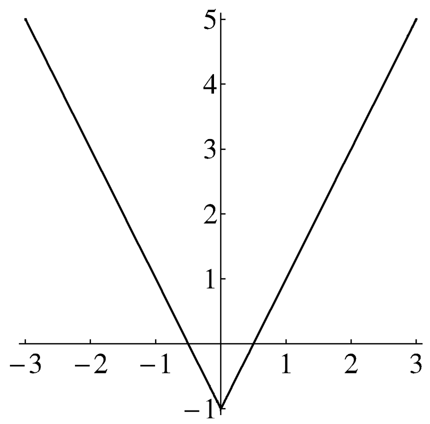
[문항 1] 제시문 (가)~(라)를 읽고 문제(논제 1, 논제 2)에 답하시오. (40점)

(가) [정의: 함수의 닮은꼴/합동] 실수 전체 집합에서 정의된 함수 $f(x)$와 $g(x)$에 대해, 어떤 세 실수 a, b, c가 존재하여 (단, $a \neq 0$), $g(x) = af(x+b)+c$의 관계가 모든 실수 x에 대해 성립한다면, 함수 $f(x)$와 함수 $g(x)$는 <u>서로 닮은꼴</u>이라고 하자. 특히, $|a|=1$인 실수 a와 실수 b, c가 존재하여, 위 관계식이 모든 실수 x에 대해 성립한다면, 함수 $f(x)$와 함수 $g(x)$는 <u>합동</u>이라고 하자.

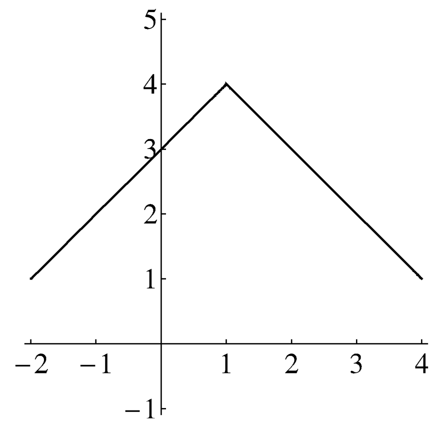
(나) [예시] $f(x)=|x|$, $g(x)=2|x|-1$, $h(x)=4-|x-1|$인 경우, $g(x)=2f(x)-1$이므로 함수 $f(x)$와 함수 $g(x)$는 서로 닮은꼴이고, $h(x)=-f(x-1)+4$이므로 함수 $f(x)$와 함수 $h(x)$는 합동이다. 이 함수들의 그래프는 아래와 같다.



<그림 1> $f(x)$의 그래프



<그림 2> $g(x)$의 그래프



<그림 3> $h(x)$의 그래프

(다) [닮은꼴/합동의 성질] 함수 $f(x)$와 함수 $g(x)$가 서로 닮은꼴이고 함수 $g(x)$와 함수 $h(x)$가 서로 닮은꼴이면 함수 $f(x)$와 함수 $h(x)$는 서로 닮은꼴이다. 마찬가지로 함수 $f(x)$와 함수 $g(x)$가 합동이고 함수 $g(x)$와 함수 $h(x)$가 합동이면 함수 $f(x)$와 함수 $h(x)$는 합동이다.

(라) 함수 $f(x)$가 $\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty$이면 $f(x)$를 양으로 발산하는 함수라고 하고, $\lim_{x\to\infty} f(x)=-\infty$이면 $f(x)$를 음으로 발산하는 함수라고 한다.

논제 1. (15점) 제시문 (가)의 정의에 따라, 함수 $F(x)=x^2$와 함수 $G(x)=px^2+qx+r$는 <u>서로 닮은꼴</u>임을 논술하라. (단, $p \neq 0$이고 p, q, r은 실수)

논제 2. (25점) 함수 $H(x)=x^3+3x^2+5$에 대하여 아래에 제시된 세 가지 조건을 만족하는 모든 함수 $K(x)$를 구하라. 그리고 구한 함수가 다음의 세 가지 조건을 만족하는지를 논술하라.

① 함수 $H(x)$와 함수 $K(x)$는 <u>합동</u>이다.
② 함수 $K(x)$는 음으로 발산하는 함수이다.
③ 방정식 $K(x)=0$은 서로 다른 세 실근을 갖고, 이 실근의 합은 0이다.

[문항 2] 제시문 (가)~(마)를 읽고 문제(논제 1, 논제 2)에 답하시오. (40점)

(가) **[외판원 문제]** 어느 외판원이 n개의 도시를 방문하여 제품을 판매하려고 한다. 모든 도시를 한 번씩만 방문하려고 할 때, 어느 순서로 도시를 방문해야 여행 거리가 최소가 되는가? 이러한 물음을 일반적으로 “외판원 문제”라고 한다. 여행 거리가 최소인 경로를 찾는 한 방법으로 다음을 생각해 볼 수 있다. n개의 도시를 방문하는 여행 경로는 $n!$개가 있다. 각각의 여행 경로에 대해 여행 거리를 계산하면 여행 거리가 최소인 경로를 찾을 수 있다. 비록 이론적으로는 도시의 수에 상관없이 이 방법을 적용할 수 있지만, 실질적으로는 작은 n에 대해서만 이 방법을 적용할 수 있다. 그 이유는 n이 아주 크지 않은 경우라도 계승 $n!$은 현실적으로 다룰 수 없을 정도로 매우 크기 때문이다. 예를 들어, 방문해야 할 도시의 수가 50이라면 모든 경로의 수는

$$50!=30414093201713378043612608166064768844377641568960512000000000000>10^{64}$$

이다. 이 경우, 각 여행 거리를 아주 빠른 컴퓨터를 사용하여 계산한다고 해도 엄청난 시간이 걸린다. 한 예로, 1초에 100조($=10^{14}$)개의 여행 거리를 계산할 수 있는 컴퓨터 1억($=10^{8}$)대를 사용하면, 답을 구하는 데 적어도 10^{42}초가 필요하다. 참고로 우주의 나이는 약 4×10^{17}초라고 알려져 있다. 계승은 이처럼 빨리 커지는 수인데, 이 성질을 **계승은 지수함수보다 훨씬 빨리 커진다**는 표현으로 나타낸다. 이 표현의 타당성은 임의의 실수 t에 대해, $n!$과 t^n의 비가 n이 커질 때 어떻게 되는지를 보고 판단할 수 있다. 계승의 이런 성질로 인해서 외판원 문제는 어려운 문제로 알려져 있다.

(나) **[자연로그의 밑 e]** 일반항이 $a_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$인 수열 $\{a_n\}$은 증가수열이다. 즉, 모든 자연수 n에 대하여 $a_n<a_{n+1}$을 만족한다. 그리고 n이 무한히 커지면 수열 $\{a_n\}$은 자연로그의 밑 e에 한없이 가까워진다. 즉, $\lim_{n\to\infty}a_n=e=2.718\cdots$이다.

(다) **[수학적 귀납법]** 자연수 n에 대한 명제 $p(n)$이 모든 자연수 n에 대하여 성립함을 증명하려면 다음의 두 가지를 보이면 된다.

① $n=1$일 때 명제 $p(n)$이 성립한다.
② $n=k$일 때 명제 $p(n)$이 성립한다고 가정하면 $n=k+1$일 때도 명제 $p(n)$이 성립한다.

(라) **[조임 정리]** 세 수열 $\{x_n\}, \{y_n\}, \{z_n\}$이 모든 자연수 n에 대해 $x_n<y_n<z_n$을 만족한다고 하자. 만약 수열 $\{x_n\}$과 $\{z_n\}$이 수렴하고 그 극한값이 C로 같다면, 즉, $\lim_{n\to\infty}x_n=\lim_{n\to\infty}z_n=C$라면, 수열 $\{y_n\}$은 수렴하고 $\lim_{n\to\infty}y_n=C$이다.

(마) **[극한의 성질]** 수열 $\{b_n\}$이 $\lim_{n\to\infty}b_n=0$을 만족하면, $\lim_{n\to\infty}(b_n)^n=0$이다.

논제 1. (20점) 제시문 (나)와 제시문 (다)를 이용하여 모든 자연수 n에 대해서 $\frac{1}{n!}<\frac{e^n}{n^n}$ 이 성립함을 논술하라.

논제 2. (20점) 임의의 실수 t에 대해 $\lim_{n\to\infty}\frac{t^n}{n!}$ 의 값을 구하여라. 단, 반드시 논제 1에서 증명한 부등식, 제시문 (라), 그리고 제시문 (마)를 이용하라. 이 결과를 바탕으로 제시문 (가)에 있는 ‘계승은 지수함수보다 훨씬 빨리 커진다’는 주장의 타당성에 대해서 논술하라.