2014학년도 가톨릭대학교 수시모집 논술우수자전형 <이과문항> 해설

1. 출제 방침

1) 고교 교과서에 기반한 고교 과정 내의 문제를 출제한다.
2) 제시문에 대한 독해력과 분석력, 제시문을 바탕으로 제시된 문제를 해결하는 사고력과 적용하는 능력, 생각하는 바를 논리적으로 전개하는 논술능력을 측정하는 문제를 출제한다.
3) 제시문은 고교 교과서내의 내용을 80%이상 포함하는 것을 원칙으로 한다.

2. 출제 유형

1) 지문제시형 문제를 출제한다.
2) 제시문은 고교 교과서("수학", "수학 I", "미적분과 통계기본")의 다음을 참조하여 구성한다.
   ① 수학 :함수의 평형이동, 방정식과 부등식, 순열과 조합
   ② 수학 I : 수학적 귀납법, 수열, 수열의 극한
   ③ 미적분과 통계기본 : 다항함수의 정적분
3) 수리논술(이과, 간호-자연, 생미 이과) 문제는 지문에 대한 정확한 독해력, 내용의 분석능력, 제시된 지식을 이용하여 문제를 해결하는 능력 등을 측정하는 문제를 출제한다. 점수는 80 점이며 변별력을 위해 2개의 문항으로 구성하되, 각 문항은 2개의 소 논제로 구성한다.
4) 약 80-90분 이내에 작성하도록 한다.

3. 출제 의도

▪ 수리논술(이과, 간호-자연)

1) [이과 문항1, 간호-자연 문항1] 제시문을 통해 함수의 변환(평행이동 및 상수곱)에 대해 이해하도록 하였으며, 제시문에 기술된 정의를 통해 함수간의 변환 관계를 유추하도록 하였다. 이를 통해 수학적 정의를 정확히 해석하고 적용할 수 있는 지를 평가하도록 하였다.
2) [간호-자연 문항2] 제시문을 통해 수학적 귀납법을 이해하고 적용할 수 있도록 하였으며, 이를 바탕으로 계승의 성질을 유추하도록 하였다. 이 문제를 통해 자신의 생각을 수리논리적으로 표현할 수 있는 지를 평가하도록 하였다.
3) [이과 문항2] 제시문을 통해 수학적 귀납법을 이해하고 적용할 수 있도록 하였으며, 이를 바탕으로 귀납적으로 정의된 함수의 성질을 유추하도록 하였다.
4) 궁극적으로 고등학교 수학 문제 제시를 통해 대학 진학 후 이과과목을 수강할 수 있을

정도의 기초적인 능력을 갖추고 있는지를 측정하고자 하였다.

4. 평가기준

1) 기본사항

가) 각 논제를 각각 가중치를 가지고 채점하되 총점으로 환산하여 총괄 평가. 수리논술에서는 **배당된 점수 범위 내에서 등급이 아닌 점수로 표기하여 합산함**.

나) 채점위원 2인이 1조가 되어 한 답안지를 1차와 2차로 나누어 채점하고, 1차 채점의 결과가 10점 이상의 차이가 날 경우 채점위원이 공동 합의로 2차 채점을 진행하고, 2차 채점에서 위원간의 조정이 이루어지지 않을 경우 3차 채점을 실시한다. 3차 채점은 출제위원을 포함한 새로운 채점위원 1인이 채점하되 1차 채점의 상위와 하위 점수 사이의 점수를 부여한다.

다) 논술 답안에 수험생의 신원을 알릴 만한 요소가 있을 때는 다음과 같이 처리한다.

① 이름이 본문 내용과 별도로 표기된 경우 : 내용, 형식 모두 0점으로 채점

② 이름이 본문 중에 자연스럽게 노출된 경우 : 형식 부분에서 5점 감점

③ 제목이 표기된 경우 : 형식 부분에서 5점 감점

④ 기타 의도적으로 수험생의 신원을 알리는 기호로 판단되는 요소가 있는 경우 : 사안의 경중에 따라 형식 부분에서 5점 이상 감점

2) 세부 사항

가) 문제의 의도에서 완전히 이탈했거나 각 논제와 전혀 다른 내용을 서술한 경우는 0점으로 채점한다.

나) **[간호-자연 문항 1]**

(논제 1) (15점)

1) 제시문 (가)의 정의에 따라 두 함수가 닮은꼴임을 확인하는 계산이 올바르고 이를 바탕으로 닮은꼴임을 올바르게 논술하면 최대 15점 부여. 계산이 올바르지 않거나 논리전개에 오류가 있으면 정도에 따라 감점하되 최대 10점 부여. 계산과정 상의 실수나 논리 전개 과정에 부분 점수를 부여할 수 있는 경우에는 하도록 한다. 아무런 논리전개 없이 혹은 논리적으로 올바르지 않은 서술을 하고 서로 닮은꼴이라고 진술한 경우 0점을 부여한다.

(논제 2) (25점)

1) $K(x)$를 구하는 과정을 바르게 논술하면 최대 20점. 구한 $K(x)$가 조건을 만족한다는 것을 바르게 논술하면 최대 5점 추가.

1-1) $K(x)$가 $H(x)$와 합동이라는 조건을 이용하여 올바르게 논술하면 최대 5점.

1-2) 음으로 발산하는 함수라는 조건을 이용하여 바르게 논술하면 최대 5점.

1-3) 근의 합이 0이 된다는 조건을 이용하여 바르게 논술하면 최대 5점.

1-4) 세 실근을 갖는다는 조건을 이용하여 바르게 논술하면 최대 5점.

2) 구하는 과정없이 $K(x)$의 식을 바르게 구하고, 조건을 만족하는지 바르게 논술하면 최대 20점.

2-1) $K(x)$와 $H(x)$가 합동임을 바르게 논술하면 최대 5점.

2-2) $K(x)$가 음으로 발산하는 함수임을 바르게 논술하면 최대 5점.

2-3) 방정식 $K(x)=0$의 세근이 0이됨을 바르게 논술하면 최대 5점.

2-4) 방정식 $K(x)=0$이 세 실근을 갖는다는 것을 바르게 논술하면 최대 5점.

다) **[간호-자연 문항 2]**

(논제 1) (20점)

1) $n=1$일 때 명제가 성립함을 확인하면 최대 3점.

2) $n=k$일 때 주어진 부등식이 성립함을 가정하여 그 부등식으로부터 증명에 필요한 부등식 $\frac{1}{(k+1)!}<\frac{e^k}{(k+1)k^k}$ 혹은 $\left(\frac{k}{1+k}\right)^k\frac{e}{(k+1)!}<\frac{e^{k+1}}{(k+1)^{k+1}}$을 명시하면 최대 6점.

3) 제시문 (나)를 정확하게 해석하여 $(1+1/k)^k<e$임을 명확하게 밝히면 최대 6점. 단, 명확한 근거없이 부등식이 옳다고 주장하면 0점.

4) 이를 이용해서 $n=k+1$일 때 성립함을 확인하면 5점. 단, 3)번의 논술없이 3)번에서 보여야할 부등식을 사용하였다고 하여도 최대 5점 부여.

(논제 2) (20점)

경우 1) t를 0, 양수, 음수로 나누어 답안을 쓴 경우.

1) $t=0$인 경우를 논술하면 최대 2점.

2) t가 양수인 경우 부등식 $0<\frac{t^n}{n!}<\frac{(et)^n}{n^n}$을 사용하여, 오른쪽 극한이 0임을 보이고, 조임정리로부터 계산하는 극한이 0임을 보이면 최대 10점.

2-1) 전체적인 맥락에서 t가 양수임을 명확히 언급하면 최대 2점.

2-2) 부등식이 올바르면 최대 4점 (각 부등식은 2점씩, 같은 형태일 필요는 없음.)

2-3) 제시문 (마)를 통해 오른쪽 극한값이 0임을 보이면 최대 2점.

2-4) 조임정리를 통해 결론을 얻으면 최대 2점.

3) t가 음수인 경우에 대해서 필요한 부등식을 제대로 쓰면 최대 6점. 단, 각 부등식은 최대 3점씩.

4) 결론이 0이라는 것으로부터 타당성을 옳게 논증하면 최대 2점.

경우 2) $|t|\le 1$과 $|t|>1$로 나누어 분석한 경우.

1) $|t|\le 1$인 경우를 논술하면 최대 2점.

2) $t>1$ 경우 부등식 $\frac{1}{n!}<\frac{t^n}{n!}<\frac{(et)^n}{n^n}$을 사용하여, 오른쪽 극한이 0임을 보이고, 조임정리로부터 계산하는 극한이 0임을 보이면 최대 10점.

2-1) 전체적인 맥락에서 $t>1$임을 명확히 언급하면 최대 2점.

2-2) 부등식이 올바르면 최대 4점 (각 부등식은 2점씩, 똑같은 부등식일 필요는 없음.)

2-3) 제시문 (마)를 통해 오른쪽 극한값이 0임을 보이면 최대 2점.

2-4) 조임정리를 통해 결론을 얻으면 최대 2점.

3) $t < -1$인 경우에 대해서 필요한 부등식을 제대로 쓰면 최대 6점. 단, 각 부등식은 최대 3점씩.
4) 결론이 0이라는 것으로부터 타당성을 옳게 논증하면 최대 2점.

라) **[이과 문항 1]**

(논제 1) (15점)

1) 제시문 (가)의 정의에 따라 두 함수가 닮은꼴임을 확인하는 계산이 올바르고 이를 바탕으로 닮은꼴임을 올바르게 논술하면 최대 15점 부여. 계산이 올바르지 않거나 논리전개에 오류가 있으면 정도에 따라 감점하되 최대 10점 부여. 계산과정 상의 실수나 논리 전개 과정에 부분 점수를 부여할 수 있는 경우에는 하도록 한다. 아무런 논리전개 없이 혹은 논리적으로 올바르지 않은 서술을 하고 서로 닮은꼴이라고 진술한 경우 0점을 부여한다.

(논제 2) (25점)

$K(x)$를 올바르게 구하면 최대 5점. 이 $K(x)$를 이용하여 아래와 같이 논술하면 해당점수를 부여.

1-1) $K(x)$와 $H(x)$가 합동임을 바르게 논술하면 최대 5점.
1-2) $K(x)$가 음으로 발산하는 함수임을 바르게 논술하면 최대 5점.
1-3) 방정식 $K(x)=0$의 세근이 0이됨을 바르게 논술하면 최대 5점.
1-4) 방정식 $K(x)=0$이 세 실근을 갖는다는 것을 바르게 논술하면 최대 5점.

마) **[이과 문항 2]**

(논제 1) (20점)

$n=1$일 때 명제가 성립함을 확인하면 최대 5점.
$n=k$일 때 성립함을 가정하고 논리를 전개시키면 최대 3점.
이를 이용해서 $n=k+1$일 때 성립함을 확인하면 최대 12점.

(논제 2) (20점)

1) $f_n(\frac{1}{3})=1+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{3^k k!}$를 바르게 기술하면 최대 5점.

2) $\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{3^k k!}<\frac{1}{12}$임을 바르게 논술하면 최대 10점.
2-1) 모든 계산을 맞게 했지만, $n \geq 2$임을 명확히 하지 않으면 최대 2점 감점
2-2) 제시문 (나)의 부등식을 $n \geq 1$부터 적용하여 $f_n(1/3) < 16/12$라는 결론을 얻었다면 최대 5점 감점.
3) 위의 과정이 맞고 결론을 올바르게 논술하면 최대 5점. 단 2-2)를 통해서 결론을 얻었다면 0점을 부여한다.

5. 문항 해제 및 모범답안

[간호-자연 문항 1] (40점)

논제 1. (15점)

$$\begin{aligned} G(x) &= px^2+qx+r \\ &= p(x+\frac{q}{2p})^2+r-\frac{q^2}{4p} \\ &= pF(x+\frac{q}{2p})+r-\frac{q^2}{4p} \end{aligned}$$

이므로 제시문 (가)의 정의에 따라 $F(x)$와 $G(x)$는 서로 닮은꼴이다.

논제 2. (25점)

조건을 만족하는 함수 $K(x)$는 $H(x)$와 합동이므로 모든 실수 x에 대해 $K(x)=aH(x+b)+c$ 이 성립하는 실수 a,b,c가 존재한다. (단, $|a|=1$)

그런데, 조건 ②에 의해 $a=-1$이어야 한다.

그러면, $K(x)=-(x+b)^3-3(x+b)^2+c-5$이다.

조건 ③에 의해 세 근의 합이 0이 되어야 하므로 근과 계수와의 관계에 의해 2차항의 계수 $-3b-3$는 0이다. 따라서 $b=-1$이다.

그러므로 $K(x)=-x^3+3x+d$의 형태가 되어야 한다. (단, d는 실수)

그런데 조건 ③에 의해 방정식 $K(x)=0$는 서로 다른 세 실근을 가져야 하므로, 극대값과 극소값의 곱이 음수가 되어야 한다.

$K'(x)=-3x^2+3=3(1-x^2)$ 이므로 극대값과 극소값의 곱은 $K(1)K(-1)=(d+2)(d-2)$가 된다.

따라서 $|d|<2$인 모든 실수 d에 대해 $K(x)=-x^3+3x+d$가 세 조건을 만족하는 함수가 된다.

이제 $K(x)=-x^3+3x+d$ (단, $|d|<2$)가 주어진 세 조건을 만족하는 지를 살펴보자.

$K(x)=-H(x-1)+7+d$이므로 $K(x)$와 $H(x)$는 제시문 (가)에 따라 합동이다.

또한 $K(x)$의 최고차항의 계수가 -1이므로 $K(x)$는 음으로 발산하는 함수이다. 마지막으로 $K(x)$은 극대값 $K(1)$을 갖고 극소값 $K(-1)$을 가지고 극값의 곱 $K(-1)K(1)$은 $K(-1)K(1)=(d-2)(d+2)<0$ 이므로 방정식 $K(x)=0$은 서로 다른 세 실근을 가진다. 그런데 $K(x)$의 2차항의 계수가 0이므로 세 실근의 합은 0이다. 따라서 $K(x)$는 주어진 세 조건을 만족한다.

[간호-자연 문항 2] (40점)

논제 1. (20점)

명제 $\frac{1}{n!}<\frac{e^n}{n^n}$이 모든 자연수 n에 대해서 성립함을 수학적 귀납법으로 보이도록 하자.

우선, $n=1$일 때 $\frac{1}{n!}=1$이고 $\frac{e^n}{n^n}=e=2.718\cdots$ 이므로 $\frac{1}{n!}<\frac{e^n}{n^n}$이 성립한다.

$n=k$일 때 주어진 부등식이 성립한다고 가정하자. 즉, $\frac{1}{k!}<\frac{e^k}{k^k}$라고 가정하자.

이 부등식의 양변에 $\frac{1}{k+1}$을 곱하면 $\frac{1}{(k+1)!}<\frac{e^k}{k^k(k+1)}$이 된다.

그런데 위 부등식의 우변은 $\frac{e^k}{k^k(k+1)}=\frac{e^{k+1}}{(k+1)^{k+1}}\times\frac{(k+1)^k}{ek^k}=\frac{e^{k+1}}{(k+1)^{k+1}}\times\frac{1}{e}\times(1+\frac{1}{k})^k$

인데 제시문 (나)에 의해 모든 자연수 k에 대해 $(1+\frac{1}{k})^k<e$ 이므로 $\frac{1}{e}\times(1+\frac{1}{k})^k<1$이 된다. 따라서 $\frac{e^k}{k^k(k+1)}=\frac{e^{k+1}}{(k+1)^{k+1}}\times\frac{1}{e}\times(1+\frac{1}{k})^k<\frac{e^{k+1}}{(k+1)^{k+1}}$이 된다. 즉, $n=k+1$일 때도 $\frac{1}{n!}<\frac{e^n}{n^n}$이 성립한다. 따라서 수학적 귀납법에 의해 모든 자연수 n에 대해 $\frac{1}{n!}<\frac{e^n}{n^n}$이 성립한다.

논제 2. (20점)

실수 t가 $t=0$인 경우 $\lim_{n\to\infty}\frac{t^n}{n!}=\lim_{n\to\infty}0=0$이다.

실수 t가 $t\neq 0$인 경우 논제 1에서 증명한 부등식 $\frac{1}{n!}<\frac{e^n}{n^n}$을 이용하자. 이 경우 이 부등식의 양변에 $|t|^n$을 곱하면 모든 자연수 n에 대해 $\frac{|t|^n}{n!}<|t|^n\frac{e^n}{n^n}=\left(\frac{|t|e}{n}\right)^n$이 성립한다.

따라서 모든 자연수 n에 대해서 $-\left(\frac{|t|e}{n}\right)^n<\frac{t^n}{n!}<\left(\frac{|t|e}{n}\right)^n$이 성립한다. 그런데 $\lim_{n\to\infty}\frac{|t|e}{n}=0$이므로 제시문 (마)에 의해 $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{|t|e}{n}\right)^n=0$이 된다. 그러면 $\lim_{n\to\infty}-\left(\frac{|t|e}{n}\right)^n=0$이므로 제시문 (라)에 의해 $\lim_{n\to\infty}\frac{t^n}{n!}=0$이 된다.

$\lim_{n\to\infty}\frac{t^n}{n!}=0$이므로 n이 한 없이 커질 때 분자인 t^n 보다 분모인 계승 $n!$ 훨씬 빨리 커짐을 알 수 있다. 따라서 계승은 지수함수보다 훨씬 빨리 커진다는 것은 타당성이 있는 표현이다.

[이과 문항 1] **(40점)**

논제 1. (15점)

$$
\begin{aligned}
G(x) &= px^2 + qx + r \\
&= p\left(x + \frac{q}{2p}\right)^2 + r - \frac{q^2}{4p} \\
&= pF\left(x + \frac{q}{2p}\right) + r - \frac{q^2}{4p}
\end{aligned}
$$

이므로 제시문 (가)의 정의에 따라 $F(x)$와 $G(x)$는 서로 닮은꼴이다.

논제 2. (25점)

조건을 만족하는 함수를 $K(x)$라고 하자. 함수 $K(x)$는 $H(x)$와 합동이므로 모든 실수 x에 대해 $K(x) = aH(x+b)+c$ 이 성립하는 실수 a,b,c가 존재한다. (단, $|a|=1$)

우선, 조건 ②에 의해 $a=-1$이어야 한다.

그러면, $K(x) = -(x+b)^3 - 3(x+b)^2 + c - 5$이다.

조건 ③에 의해 세 근의 합이 0이 되어야 하므로 근과 계수와의 관계에 의해 2차항의 계수 $-3b-3$는 0이다. 따라서 $b=-1$이다.

그러므로 $K(x) = -x^3 + 3x + d$의 형태가 되어야 한다. (단, d는 실수)

그런데 조건 ③에 의해 방정식 $K(x)=0$는 서로 다른 세 실근을 가져야 하므로 극대값과 극소값의 곱이 음수가 되어야 한다. $K'(x) = -3x^2 + 3 = 3(1-x^2)$ 이므로 극대값과 극소값의 곱은 $K(1)K(-1) = (d+2)(d-2)$가 된다. 따라서 $|d| < 2$을 만족해야 한다.

따라서 $K(x)$가 조건을 모두 만족하면 $K(x) = -x^3 + 3x + d$의 형태이어야 한다.(단, $|d| < 2$)

이제 이러한 함수 $K(x) = -x^3 + 3x + d$ (단, $|d| < 2$)가 주어진 세 조건을 만족하는 지를 살펴보자. $K(x) = -H(x-1) + 7 + d$이므로 $K(x)$와 $H(x)$는 제시문 (가)에 따라 합동이다.

또한 $K(x)$의 최고차항의 계수가 -1이므로 $K(x)$는 음으로 발산하는 함수이다. 마지막으로 $K(x)$은 극대값 $K(1)$을 갖고 극소값 $K(-1)$을 가지고 극값의 곱 $K(-1)K(1)$은 $K(-1)K(1) = (d-2)(d+2) < 0$ 이므로 방정식 $K(x)=0$은 서로 다른 세 실근을 가진다. 그런데 $K(x)$의 2차항의 계수가 0이므로 세 실근의 합은 0이다. 따라서 $K(x)$는 주어진 세 조건을 만족한다.

따라서 주어진 조건을 만족하는 모든 함수는 $K(x) = -x^3 + 3x + d$ (단, $|d| < 2$)이다. d의 특정한 한 값만 지정하여 위 과정을 증명하여도 정답으로 인정한다.

[이과 문항 2] **(40점)**

논제 1. (20점)

$f_n(x)=1+\sum_{k=1}^{n}\frac{x^k}{k!}=1+\sum_{m=1}^{n}\frac{x^m}{m!}$임을 수학적 귀납법으로 보이도록 하자.

첫째, $n=1$이면 $f_1(x)=1+x$이고 $1+\sum_{m=1}^{n}\frac{x^m}{m!}=1+x$이므로 $f_n(x)=1+\sum_{m=1}^{n}\frac{x^m}{m!}$이 성립한다.

둘째, $k\geq 1$인 자연수 k에 대해 $f_k(x)=1+\sum_{m=1}^{k}\frac{x^m}{m!}$이 성립한다고 하자. 그러면 제시문 (라)에 의해 $f_{k+1}(x)=1+\int_0^x f_k(t)dt$이므로

$$\begin{aligned} f_{k+1}(x) &= 1+\int_0^x 1+\sum_{m=1}^{k}\frac{t^m}{m!}dt \\ &= 1+x+\sum_{m=1}^{k}\int_0^x\frac{t^m}{m!}dt \\ &= 1+x+\sum_{m=1}^{k}\frac{x^{m+1}}{(m+1)!} \\ &= 1+\sum_{m=1}^{k+1}\frac{x^m}{m!} \end{aligned}$$

이 성립한다. 즉, $n=k+1$일 때 식이 성립한다.

따라서 수학적 귀납법에 의해 모든 자연수 n에 대해 $f_n(x)=1+\sum_{k=1}^{n}\frac{x^k}{k!}$이 성립한다.

논제 2. (20점)

모든 자연수 n에 대해 $f_n(x)=1+\sum_{k=1}^{n}\frac{x^k}{k!}$이므로 $f_n(\frac{1}{3})=1+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{3^k k!}$이다.

제시문 (나)에 의해 $k\geq 2$인 모든 자연수 k에 대하여 $\frac{1}{k!}<\frac{3^k}{4^k}$ 이므로 $n\geq 2$인 자연수 n에 대하여 $\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{3^k k!}<\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{4^k}=\frac{\left(\frac{1}{4}\right)^2\left\{1-\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}\right\}}{1-\frac{1}{4}}<\frac{\left(\frac{1}{4}\right)^2}{\frac{3}{4}}=\frac{1}{12}$이다.

따라서 $n\geq 2$인 모든 자연수 n에 대하여 $f_n(\frac{1}{3})=1+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{3^k k!}<1+\frac{1}{3}+\frac{1}{12}=\frac{17}{12}$이 성립한다.