가톨릭대학교 2014학년도 수시

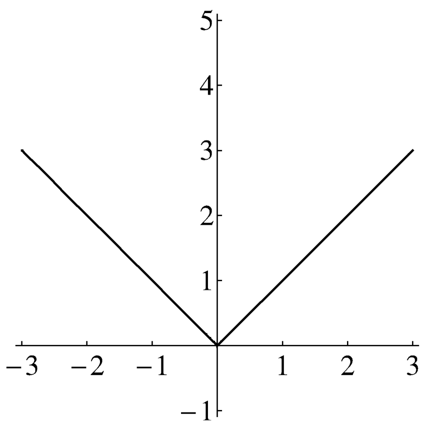
논술고사 문제지 【논술우수자 전형】 (이과)

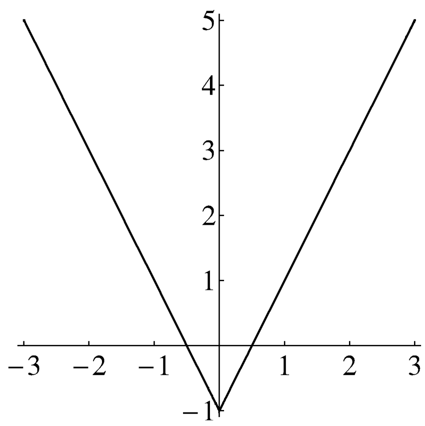
지원학부(과) : 이 름 : 수험번호 :

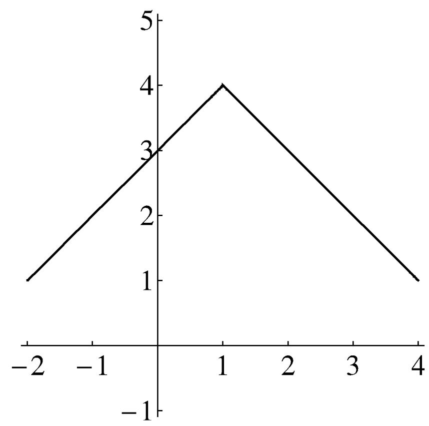
[문항 1] 제시문 (가)~(라)를 읽고 문제(논제 1, 논제 2)에 답하시오. (40점)

(가) [정의: 함수의 닮은꼴/합동] 실수 전체 집합에서 정의된 함수 $f(x)$와 $g(x)$에 대해, 어떤 세 실수 a, b, c가 존재하여 (단, $a \neq 0$), $g(x) = af(x+b)+c$의 관계가 모든 실수 x에 대해 성립한다면, 함수 $f(x)$와 함수 $g(x)$는 서로 닮은꼴이라고 하자. 특히, $|a|=1$인 실수 a와 실수 b, c가 존재하여, 위 관계식이 모든 실수 x에 대해 성립한다면, 함수 $f(x)$와 함수 $g(x)$는 합동이라고 하자.

(나) [예시] $f(x)=|x|$, $g(x)=2|x|-1$, $h(x)=4-|x-1|$인 경우, $g(x)=2f(x)-1$이므로 함수 $f(x)$와 함수 $g(x)$는 서로 닮은꼴이고, $h(x)=-f(x-1)+4$이므로 함수 $f(x)$와 함수 $h(x)$는 합동이다. 이 함수들의 그래프는 아래와 같다.


<그림 1> $f(x)$의 그래프


<그림 2> $g(x)$의 그래프


<그림 3> $h(x)$의 그래프

(다) [닮은꼴/합동의 성질] 함수 $f(x)$와 함수 $g(x)$가 서로 닮은꼴이고 함수 $g(x)$와 함수 $h(x)$가 서로 닮은꼴이면 함수 $f(x)$와 함수 $h(x)$는 서로 닮은꼴이다. 마찬가지로 함수 $f(x)$와 함수 $g(x)$가 합동이고 함수 $g(x)$와 함수 $h(x)$가 합동이면 함수 $f(x)$와 함수 $h(x)$는 합동이다.

(라) 함수 $f(x)$가 $\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty$이면 $f(x)$를 양으로 발산하는 함수라고 하고, $\lim_{x\to\infty} f(x)=-\infty$이면 $f(x)$를 음으로 발산하는 함수라고 한다.

논제 1. (15점) 제시문 (가)의 정의에 따라, 함수 $F(x)=x^2$와 함수 $G(x)=px^2+qx+r$는 서로 닮은꼴임을 논술하라. (단, $p \neq 0$이고 p, q, r은 실수)

논제 2. (25점) 함수 $H(x)=x^3+3x^2+5$에 대하여 아래에 제시된 세 가지 조건을 만족하는 함수 $K(x)$는 무수히 많다. 이 중 한 함수의 식을 구하고, 구한 함수가 다음의 세 가지 조건을 만족하는지를 논술하라.

① 함수 $H(x)$와 함수 $K(x)$는 합동이다.
② 함수 $K(x)$는 음으로 발산하는 함수이다.
③ 방정식 $K(x)=0$은 서로 다른 세 실근을 갖고, 이 실근의 합은 0이다.

[문항 2] 제시문 (가)~(라)를 읽고 문제(논제 1, 논제 2)에 답하시오. (40점)

(가) **[수학적 귀납법]** n_0를 자연수라고 하자. 자연수 n에 대한 명제 $p(n)$이 $n \ge n_0$인 모든 자연수 n에 대하여 성립함을 증명하려면 다음 두 가지를 보이면 된다.

① $n = n_0$일 때 명제 $p(n)$이 성립한다. ② $k \ge n_0$인 자연수 k에 대해 $n = k$일 때 명제 $p(n)$이 성립한다고 가정하면 $n = k+1$일 때도 명제 $p(n)$이 성립한다.

이와 같은 방법으로 자연수에 대한 어떤 명제가 참임을 증명하는 것을 수학적 귀납법이라고 한다.

(나) **[수학적 귀납법의 적용 예]** $n \ge 2$인 모든 자연수 n에 대하여 부등식 $n! > \dfrac{4^n}{3^n}$이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명하는 과정은 다음과 같다.

첫째, $n = 2$일 때 $n! = 2$이고 $\dfrac{4^n}{3^n} = \dfrac{16}{9}$이므로 $n! > \dfrac{4^n}{3^n}$이 성립한다.

둘째, $k \ge 2$인 자연수 k에 대해 $k! > \dfrac{4^k}{3^k}$이 성립한다고 가정하자. 이 부등식의 양변에 $k+1$을 곱하면 $(k+1)! > (k+1)\dfrac{4^k}{3^k}$이 성립한다. 그런데 $k \ge 2$이므로 $(k+1) \ge 3 > \dfrac{4}{3}$이다. 따라서 $(k+1)! > (k+1)\dfrac{4^k}{3^k} > \dfrac{4^{k+1}}{3^{k+1}}$ 이 성립한다. 그러므로 수학적 귀납법에 의해 $n \ge 2$인 모든 자연수 n에 대하여 부등식 $n! > \dfrac{4^n}{3^n}$이 성립한다.

(다) $n \ge 2$인 모든 자연수 n에 대하여 $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} < \frac{17}{4}$이 성립함을 확인하는 과정을 생각해 보자. 제시문 (나)에 의해 $k \ge 2$인 모든 자연수 k에 대하여 $\dfrac{1}{k!} < \dfrac{3^k}{4^k}$ 이므로 $n \ge 2$인 자연수 n에 대하여

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k!} = \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{k!} < \frac{3^2}{4^2} + \cdots + \frac{3^n}{4^n}$$

이다. 그런데 위 부등식의 우변은 등비수열의 합이므로

$$\frac{3^2}{4^2} + \cdots + \frac{3^n}{4^n} = \frac{\left(\frac{3}{4}\right)^2 \left\{1 - \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}\right\}}{1 - \frac{3}{4}} < \frac{\left(\frac{3}{4}\right)^2}{\frac{1}{4}} = \frac{9}{4}$$

이다. 따라서 $n \ge 2$인 모든 자연수 n에 대하여

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} < 2 + \frac{9}{4} = \frac{17}{4}$$

이 성립한다.

(라) **[함수 $f_n(x)$의 귀납적 정의]** 다항함수 $f_1(x)$, $f_2(x)$, $\cdots$, $f_n(x)$, $\cdots$ 를 다음과 같이 귀납적으로 정의하자.

$$\boxed{\begin{aligned} &f_1(x) = 1 + x \\ &f_{n+1}(x) = 1 + \int_0^x f_n(t)\,dt \quad (n = 1, 2, 3, \cdots) \end{aligned}}$$

논제 1. (20점) 제시문 (라)에서 정의된 다항함수 $f_n(x)$가 모든 자연수 n에 대해서 $f_n(x) = 1 + \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k!}$임을 제시문 (가)의 방법을 사용하여 논술하라.

논제 2. (20점) 제시문 (라)에서 정의된 다항함수 $f_n(x)$에 대한 아래의 명제 P가 참임을 제시문 (다)를 참조하여 논술하라. 단, 반드시 제시문 (나)에서 증명된 부등식을 이용하라.

P: $n \ge 2$인 모든 자연수 n에 대해서 $f_n\left(\dfrac{1}{3}\right) < \dfrac{17}{12}$이다.