가톨릭대학교 2013학년도 수시1차

논술고사 문제지 【논술우수자 전형】 (간호대학-과학)

지원학부(과) : 이 름 : 수험번호 :

[문항 1] 제시문 (가)~(라)를 읽고 문제(논제 1, 논제 2)에 답하시오. (40점)

(가) 변환 $f:(x,y)\to(x',y')$가 다음 두 조건을 만족하면 변환 f를 **선형변환**이라고 한다.

> ① 임의의 두 점 $\mathrm{P}(x_1,y_1)$, $\mathrm{Q}(x_2,y_2)$에 대해서 $f(\mathrm{P}+\mathrm{Q})=f(\mathrm{P})+f(\mathrm{Q})$이다.
> ② 임의의 점 $\mathrm{P}(x,y)$와 임의의 실수 k에 대해서 $f(k\mathrm{P})=kf(\mathrm{P})$이다.

(나) 변환 $f:(x,y)\to(x',y')$에서 점 (x,y)와 점 (x',y') 사이에 $\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$인 관계가 있다고 하자. 여기서 a,b,c,d는 상수이다. 그러면 변환 f가 제시문 (가)의 두 조건을 만족함을 다음과 같이 알 수 있다. 임의의 두 점 $\mathrm{P}(x_1,y_1)$, $\mathrm{Q}(x_2,y_2)$에 대해서 $\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1+x_2\\y_1+y_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_2\\y_2\end{pmatrix}$이므로 $f(\mathrm{P}+\mathrm{Q})=f(\mathrm{P})+f(\mathrm{Q})$이고, 임의의 점 $\mathrm{P}(x,y)$와 임의의 실수 k에 대해서 $\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}kx\\ky\end{pmatrix}=k\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$이므로 $f(k\mathrm{P})=kf(\mathrm{P})$이다. 따라서 f는 선형변환이다.

(다) 변환 $f:(x,y)\to(x',y')$가 선형변환이면 모든 점 (x,y)에 대해서 $\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$이 되는 상수 a,b,c,d를 찾을 수 있다. 이 행렬 $\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$를 선형변환 f의 행렬이라고 한다. 이제 선형변환 f에 의해 점 $(1,0)$이 점 (a_1,b_1)로 옮겨지고, 점 $(0,1)$이 점 (a_2,b_2)로 옮겨진다고 하자. 그러면 선형변환 f의 행렬 $\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$는 다음을 만족하게 된다.

$$\begin{pmatrix}a_1\\b_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}a_2\\b_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}.$$

이로부터 선형변환 f의 행렬이 $\begin{pmatrix}a_1&a_2\\b_1&b_2\end{pmatrix}$임을 알 수 있다.

(라) 좌표평면의 한 영역 S와 선형변환 $f:(x,y)\to(x',y')$에 대해 영역 $f(S)$를 다음과 같이 정의하자.

$$f(S)=\{\,f(\mathrm{P})\mid \mathrm{P}\text{ 는 영역 } S \text{ 안의 점}\}$$

이 때, 선형변환 f의 행렬 $\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$에 대해 $ad-bc\neq0$이면 다음이 성립한다.

> ① 영역 S의 경계에 있는 점은 f에 의해 영역 $f(S)$의 경계에 있는 점으로 옮겨진다.
> 또한, 영역 S의 내부에 있는 점은 f에 의해 영역 $f(S)$의 내부에 있는 점으로 옮겨진다.
> ② 영역 $f(S)$의 넓이는 (영역 S의 넓이)$\times|ad-bc|$가 된다.

논제 1. (15점) 제시문 (가)에 근거하여 임의의 선형변환에 의해 점 $(0,0)$이 어떤 점으로 옮겨지는지를 밝히고, 이를 바탕으로 변환 $g:(x,y)\to(y-x,\,2x+1)$이 선형변환인지 논하시오.

논제 2. (25점) ① 어떤 선형변환 $f:(x,y)\to(x',y')$에 의해 점 $(2,0)$이 점 $(1,0)$으로 옮겨지고 점 $(0,\sqrt{3})$은 점 $(0,1)$로 옮겨진다고 하자. 제시문에 근거하여 이 선형변환 f의 행렬을 구하시오. 또한 영역 S가 $S=\left\{(x,y)\mid \dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}\leq1\right\}$일 때 영역 $f(S)$의 경계에 있는 점의 x좌표와 y좌표 사이의 관계식을 구하고 이를 이용하여 영역 S의 넓이를 구하시오.
② 위의 방법을 참고하여 타원 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$의 내부로 이루어진 영역의 넓이를 구하는 방법을 논술하고 그 넓이를 구하시오. (단, a와 b는 양의 상수)

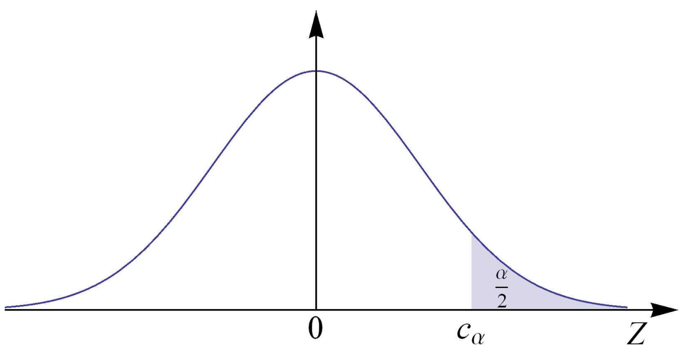
[문항 2] 제시문 (가)~(라)를 읽고 문제(논제 1, 논제 2)에 답하시오. (40점)

(가) 모집단에서 임의추출한 크기가 n인 표본의 원소를 $X_1, \cdots, X_n$ 이라고 할 때, 이들의 평균 $\overline{X} = \frac{1}{n}(X_1 + \cdots + X_n)$를 표본평균이라고 한다. 이 때 $\overline{X}$는 확률변수이다. 특히, 정규분포 $\mathrm{N}(m, \sigma^2)$을 따르는 모집단에서 크기가 n인 표본을 임의추출할 때 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}(m, \frac{\sigma^2}{n})$을 따른다.

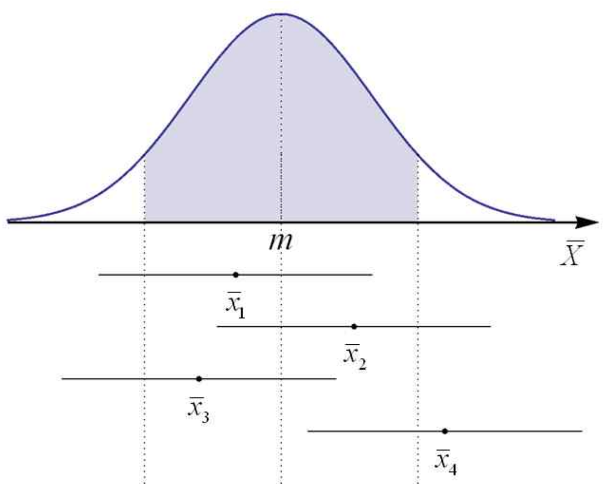
(나) 표준정규분포 $\mathrm{N}(0, 1)$을 따르는 확률변수 Z와 $0 < \alpha < 1$ 인 상수 α에 대해 $Z \geqq c$일 확률이 $\frac{\alpha}{2}$가 되는 c를 c_α라고 표시하자. 즉, $P(Z \geqq c_\alpha) = \frac{\alpha}{2}$이다. <그림 1>에는 Z의 확률밀도함수의 그래프와 c_α가 도시되어 있다. 이 그림에서 어두운 부분의 넓이는 $\frac{\alpha}{2}$이다.

(다) 확률변수 X가 정규분포 $\mathrm{N}(m, \sigma^2)$을 따르면 확률변수 $\frac{X-m}{\sigma}$는 표준정규분포를 따른다. (단, m과 σ는 상수이고 σ는 양수이다.)

(라) 어떤 모집단이 정규분포 $\mathrm{N}(m, \sigma^2)$을 따른다고 하자. $0 < \alpha < 1$ 인 상수 α에 대해 신뢰도 $100(1-\alpha)\%$로 모평균 m을 추정하는 방법은 다음과 같다. 우선 표본평균 $\overline{X}$에 대해 $P(m - A \leqq \overline{X} \leqq m + A) = 1 - \alpha$이 성립하는 A를 구한다. 그러면 $P(\overline{X} - A \leqq m \leqq \overline{X} + A) = P(m - A \leqq \overline{X} \leqq m + A) = 1 - \alpha$이므로 모평균 m이 구간 $[\overline{X} - A, \overline{X} + A]$ 내에 있을 확률이 $1 - \alpha$이다. 이 때 구간 $[\overline{X} - A, \overline{X} + A]$를 m에 대한 신뢰도 $100(1-\alpha)\%$의 신뢰구간이라고 부른다. <그림 2>에는 표본평균 $\overline{X}$의 확률밀도함수의 그래프와 표본평균 $\overline{X}$의 4개의 값 $\overline{x}_1$, $\overline{x}_2$, $\overline{x}_3$, $\overline{x}_4$을 사용하여 얻은 4개의 신뢰구간이 도시되어 있다. (단, m과 σ는 상수이다.)



<그림 1>



<그림 2>

논제 1. (20점) 제시문 (라)의 A를 표본의 크기 n, 모집단의 표준편차 σ, 제시문 (나)에서 정의된 c_α를 이용하여 나타내고자 한다. 제시문을 바탕으로 A를 나타내는 방법을 논의하고 그 결과를 쓰시오.

논제 2. (20점) 어떤 회사에서 생산되는 제품의 무게는 정규분포 $\mathrm{N}(m, \sigma^2)$을 따른다고 한다. 이 제품 중 100개를 임의추출하여 조사하였더니 평균무게가 $\overline{x} = 12.5\mathrm{g}$이었다. 이로부터 제시문 (라)의 방식을 따라 신뢰도 95%로 모평균 m을 추정하여 신뢰구간 $[10.2,\ 14.8]$을 구했다. 이 추정 결과를 근거로 갑돌이는 “이 회사의 제품을 임의로 100개 구매하면 그 제품들의 평균무게가 구간 $[10.2,\ 14.8]$ 내에 있을 확률이 0.95이다.”라고 판단하였다. 갑돌이의 이러한 판단이 올바른 것인지 주어진 제시문을 바탕으로 논술하시오. (단, m과 σ는 상수이고 σ는 양수이다.)