가톨릭대학교 2013학년도 수시1차
논술고사 문제지 【논술우수자 전형】 (이과)

지원학부(과) : 이 름 : 수험번호 :

[문항 1] 제시문 (가)~(라)를 읽고 문제(논제 1, 논제 2)에 답하시오. (40점)

(가) 변환 $f:(x, y) \to (x', y')$가 다음 두 조건을 만족하면 변환 f를 **선형변환**이라고 한다.

> ① 임의의 두 점 $\mathrm{P}(x_1, y_1)$, $\mathrm{Q}(x_2, y_2)$에 대해서 $f(\mathrm{P}+\mathrm{Q}) = f(\mathrm{P}) + f(\mathrm{Q})$이다.
> ② 임의의 점 $\mathrm{P}(x, y)$와 임의의 실수 k에 대해서 $f(k\mathrm{P}) = kf(\mathrm{P})$이다.

(나) 변환 $f:(x, y) \to (x', y')$에서 점 (x, y)와 점 (x', y') 사이에 $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$인 관계가 있다고 하자. 여기서 a, b, c, d는 상수이다. 그러면 변환 f가 제시문 (가)의 두 조건을 만족함을 다음과 같이 알 수 있다. 임의의 두 점 $\mathrm{P}(x_1, y_1)$, $\mathrm{Q}(x_2, y_2)$에 대해서 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1+x_2 \\ y_1+y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$이므로 $f(\mathrm{P}+\mathrm{Q}) = f(\mathrm{P}) + f(\mathrm{Q})$이고, 임의의 점 $\mathrm{P}(x, y)$와 임의의 실수 k에 대해서 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} kx \\ ky \end{pmatrix} = k\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$이므로 $f(k\mathrm{P}) = kf(\mathrm{P})$이다. 따라서 f는 선형변환이다.

(다) 변환 $f:(x, y) \to (x', y')$가 선형변환이면 모든 점 (x, y)에 대해서 $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$이 되는 상수 a, b, c, d를 찾을 수 있다. 이 행렬 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$를 선형변환 f의 행렬이라고 한다. 이제 선형변환 f에 의해 점 $(1,0)$이 점 (a_1, b_1)로 옮겨지고, 점 $(0, 1)$이 점 (a_2, b_2)로 옮겨진다고 하자. 그러면 선형변환 f의 행렬 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$는 다음을 만족하게 된다.

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

이로부터 선형변환 f의 행렬이 $\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix}$임을 알 수 있다.

(라) 좌표평면의 한 영역 S와 선형변환 $f:(x, y) \to (x', y')$에 대해 영역 $f(S)$를 다음과 같이 정의하자.

$$f(S) = \{\, f(\mathrm{P}) \mid \mathrm{P}\text{ 는 영역 } S \text{ 안의 점}\}$$

이 때, 선형변환 f의 행렬 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$에 대해 $ad - bc \neq 0$이면 다음이 성립한다.

> ① 영역 S의 경계에 있는 점은 f에 의해 영역 $f(S)$의 경계에 있는 점으로 옮겨진다.
> 또한, 영역 S의 내부에 있는 점은 f에 의해 영역 $f(S)$의 내부에 있는 점으로 옮겨진다.
> ② 영역 $f(S)$의 넓이는 (영역 S의 넓이)$\times|ad - bc|$가 된다.

논제 1. (15점) 제시문 (가)에 근거하여 임의의 선형변환에 의해 점 $(0, 0)$이 어떤 점으로 옮겨지는지를 밝히고, 이를 바탕으로 변환 $g:(x, y) \to (y - x, 2x + 1)$이 선형변환인지 논하시오.

논제 2. (25점) ① 어떤 선형변환 $f:(x, y) \to (x', y')$에 의해 점 $(2, 0)$이 점 $(1, 0)$으로 옮겨지고 점 $(0, \sqrt{3})$은 점 $(0, 1)$로 옮겨진다고 하자. 제시문에 근거하여 이 선형변환 f의 행렬을 구하시오. 또한 영역 S가 $S = \left\{(x, y) \mid \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{3} \leq 1\right\}$일 때 영역 $f(S)$의 경계에 있는 점의 x좌표와 y좌표 사이의 관계식을 구하고 이를 이용하여 영역 S의 넓이를 구하시오.
② 위의 방법을 참고하여 타원 $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$의 내부로 이루어진 영역의 넓이를 구하는 방법을 논술하고 그 넓이를 구하시오. (단, a와 b는 양의 상수)

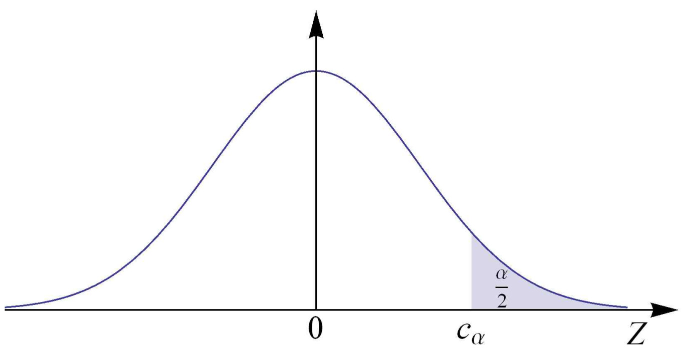
[문항 2] 제시문 (가)~(라)를 읽고 문제(논제 1, 논제 2)에 답하시오. (40점)

(가) 모집단에서 임의추출한 크기가 n인 표본의 원소를 $X_1, \cdots, X_n$ 이라고 할 때, 이들의 평균 $\overline{X}=\frac{1}{n}(X_1+\cdots+X_n)$를 표본평균이라고 한다. 이 때 $\overline{X}$는 확률변수이다. 특히, 정규분포 $\mathrm{N}(m, \sigma^2)$을 따르는 모집단에서 크기가 n인 표본을 임의추출할 때 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}(m, \frac{\sigma^2}{n})$을 따른다.

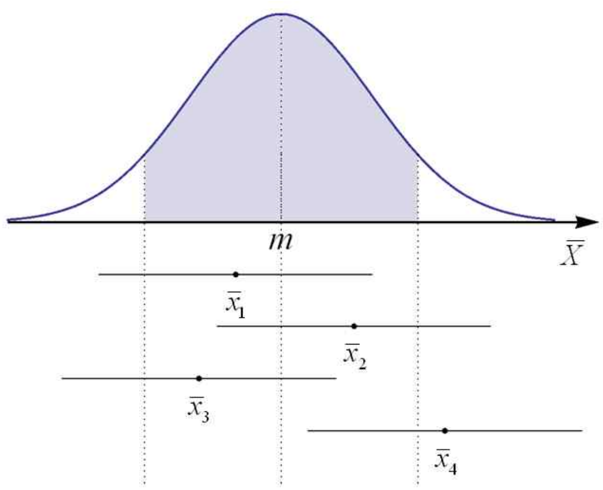
(나) 표준정규분포 $\mathrm{N}(0, 1)$을 따르는 확률변수 Z와 $0<\alpha<1$ 인 상수 α에 대해 $Z \geq c$일 확률이 $\frac{\alpha}{2}$가 되는 c를 c_α라고 표시하자. 즉, $P(Z \geq c_\alpha)=\frac{\alpha}{2}$이다. <그림 1>에는 Z의 확률밀도함수의 그래프와 c_α가 도시되어 있다. 이 그림에서 어두운 부분의 넓이는 $\frac{\alpha}{2}$이다.

(다) 확률변수 X가 정규분포 $\mathrm{N}(m, \sigma^2)$을 따르면 확률변수 $\frac{X-m}{\sigma}$는 표준정규분포를 따른다. (단, m과 σ는 상수이고 σ는 양수이다.)

(라) 어떤 모집단이 정규분포 $\mathrm{N}(m, \sigma^2)$을 따른다고 하자. $0<\alpha<1$ 인 상수 α에 대해 신뢰도 $100(1-\alpha)\%$로 모평균 m을 추정하는 방법은 다음과 같다. 우선 표본평균 $\overline{X}$에 대해 $P(m-A \leq \overline{X} \leq m+A)=1-\alpha$이 성립하는 A를 구한다. 그러면 $P(\overline{X}-A \leq m \leq \overline{X}+A)= P(m-A \leq \overline{X} \leq m+A)= 1-\alpha$이므로 모평균 m이 구간 $[\overline{X}-A, \overline{X}+A]$ 내에 있을 확률이 $1-\alpha$이다. 이 때 구간 $[\overline{X}-A, \overline{X}+A]$를 m에 대한 신뢰도 $100(1-\alpha)\%$의 신뢰구간이라고 부른다. <그림 2>에는 표본평균 $\overline{X}$의 확률밀도함수의 그래프와 표본평균 $\overline{X}$의 4개의 값 $\overline{x}_1$, $\overline{x}_2$, $\overline{x}_3$, $\overline{x}_4$을 사용하여 얻은 4개의 신뢰구간이 도시되어 있다. (단, m과 σ는 상수이다.)



<그림 1>



<그림 2>

논제 1. (20점) 제시문 (라)의 A를 표본의 크기 n, 모집단의 표준편차 σ, 제시문 (나)에서 정의된 c_α를 이용하여 나타내고자 한다. 제시문을 바탕으로 A를 나타내는 방법을 논의하고 그 결과를 쓰시오.

논제 2. (20점) 어떤 회사에서 생산되는 제품의 무게는 정규분포 $\mathrm{N}(m, \sigma^2)$을 따른다고 한다. 이 제품 중 100개를 임의추출하여 조사하였더니 평균무게가 $\overline{x}=12.5$g이었다. 이로부터 제시문 (라)의 방식을 따라 신뢰도 95%로 모평균 m을 추정하여 신뢰구간 $[10.2, 14.8]$을 구했다. 이 추정 결과를 근거로 갑돌이는 “이 회사의 제품을 임의로 100개 구매하면 그 제품들의 평균무게가 구간 $[10.2, 14.8]$ 내에 있을 확률이 0.95이다.”라고 판단하였다. 갑돌이의 이러한 판단이 올바른 것인지 주어진 제시문을 바탕으로 논술하시오. (단, m과 σ는 상수이고 σ는 양수이다.)