출제의도와 문제해설(자연계)

1. 2015학년도 자연계 논술의 목표와 기본방향

2014학년도 고려대학교 자연계 수시논술은 수학과목을 필수로 하고 과학 과목 중 하나를 선택하는 방식으로 실시하였다. 출제 범위는 고등학교 교과과정 내로 한정하였으며 수험생에게 익숙한 내용을 위주로 문제를 출제하였다. 수학과 과학 과목들은 고등학교 교과서 및 EBS 교재를 활용하여 제시문을 마련하였고 각 논제들은 수험생이 충실히 교과과정을 이수하고 제시문을 활용할 때 쉽게 해결할 수 있도록 하였다.

2015학년도 자연계 수시논술의 목표와 기본 방향은 2014학년도와 동일하다. 고려대학교 수시선발의 논술고사는 예년과 마찬가지로 고려대학교 입학을 주도하는 전형으로 합격을 위해선 올바른 정보 확보가 무엇보다 중요하다. 고려대학교 논술본부는 2015학년도 논술에 대한 이해를 돕기 위해 모의논술고사를 실시하고 이를 소개하는 자료집을 준비하였다.
본 논술자료집은 평가에 참가한 학생들의 답안을 토대로 모의논술고사의 출제의도와 평가기준을 밝힘으로써 수시 논술에 대한 정확한 정보를 제공하고 수험생 및 학부모들에게 도움을 주고자 마련되었다.

2. 출제 의도와 논제 해설, 예시 답안 및 평가

가) 논제 1(수학)

1) 출제 의도

함수의 극한과 미분, 적분은 고등학교 수학 교과과정에서 중요하게 다루어지며 정규 교과과정을 충실히 이수한 학생들이 반드시 알아야 하는 분야이다. 제시문 (가)에서는 다항함수에 직선들이 접하는 상황을 설명하고 있다. 본 논제에서는 고등학교 교과과정에서 다루는 함수의 극한과 미분 및 적분의 기본적인 개념에 대한 이해도를 평가하고자 하였다. 그리고 기본 개념을 이용하여 다항함수의 접선과 관련된 구체적인 문제를 해결할 수 있는지 평가하고자 하였다. 교과과정에서 다루는 기본 개념에 대한 정확한 이해 없이 단순한 암기만으로 얻은 지식으로는 좋은 점수를 받기 어려울 것으로 예상된다.

2) 논제 해설

(a) 주어진 한 점을 지나는 직선들 중 곡선과 수직으로 만나는 직선을 찾는 문제이다. 곡선과 직선이 수직으로 만나는 경우, 수직으로 만나는 점에서 직선의 기울기와 곡선에 접하는 접선의 기울기와의 관계를 이용하여 문제를 해결할 수 있다. 곡선에 접하는 접선의 기울기는 곡선의 방정식을 미분하여 구할 수 있고 두 직선이 수직으로 만날 조건은 두 직선의 기울기의 곱이 -1이 됨을 이용하여 얻을 수 있다.

(b) 본 문항에서는 두 가지 문제를 해결하기를 요구하고 있다. 첫 번째로 곡선에 접하는 두 접선이 있을 때, 두 접선의 교점이 만족하는 식을 이용하여 항등식을 유도하고 항등식의 미정계수를 구하기를 요구한다. 두 번째로는 곡선과 두 직선으로 둘러싸인 영영의 넓이를 구하는 문제이다. 본 문항의 문제들은 곡선의 접선의 방정식, 점이 선분을 이등분할 조건, 적분을 이용하여 평면에서 주어진 영역의 넓이 계산 등과 같이 고등학교 교과 과정에서 전형적으로 다루는 방법을 이용하여 해결된다.

(c) 직선이 곡선에 접할 때 접점과 직선의 x절편과의 관계식을 찾는 문제이다. 미분을 이용하여 곡선에 접

하는 직선의 방정식을 찾고 그 직선이 x축과 만나는 점의 x좌표를 접점의 좌표를 이용하여 표현하면 해결되는 문제이다.

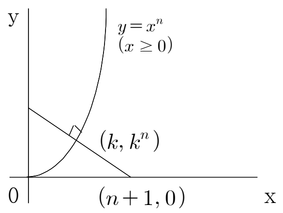
(d) 변수들이 양함수가 아닌 관계식으로 표현될 때 도함수와 관련된 함수에 대한 극한값을 구하는 문제이다. 본 문제를 해결하기 위해서는 먼저 여러 변수들을 만족시키는 관계식을 찾아야 한다. 이 관계식은 음함수 또는 매개변수 방정식 등, 여러 가지 방법으로 표현될 수 있다. 다음으로 교과 과정의 미분 단원에서 다루는 음함수의 미분법, 매개변수로 나타내어진 함수의 미분법 등을 이용하여 문제 해결을 위해 필요한 도함수를 구하고 문제에서 요구하는 극한값을 구해야 한다.

3) 우수 답안의 사례

사례 1

(a)

$(n+1,0)$을 지나는 직선이 $y=x^n$과 수직으로 만나는 점을 (k,k^n)이라 하자. 이때 (k,k^n)에서의 접선의 기울기는 nk^{n-1}. ($\because$ $y'=nx^{n-1}$)이다.



(그림1)

$$\because \frac{k^n}{k-n-1}\times n\bullet k^{n-1}=-1$$

$$n\bullet k^{2n-1}=n+1-k$$

$$n\bullet k^{2n-1}+k=n+1 \quad -(ㄱ)$$

함수 $y=nx^{2n-1}+x-n-1$의 도함수가 $y'=n(2n-1)x^{2n-2}+1>0$ 을 만족하므로 그림1에서 $(n+1,0)$에 대해 주어진 조건을 만족하는 점 (k,k^n)은 유일하며, (ㄱ)은 $k=1$일때 만족하므로 $(n+1,0)$을 지나는 직선이 $y=x^n$과 수직으로 만나는 점은 $(1,1)$이다. 이 직선은 $(n+1,0)$, $(1,1)$을 지나므로

$y-1=-\dfrac{1}{n}(n-1)$, 즉 $y=-\dfrac{1}{n}x+\dfrac{1}{n}+1$이다.

(b)

$\overline{A'C}=\overline{CB'}$이므로 $c=\dfrac{a+b}{2}$이고

A에서의 접선의 방정식 $l_a: y-a^n=na^{n-1}(x-a)$,

B에서의 접선의 방정식 $l_b: y-b^n=nb^{n-1}(x-b)$이다.

$na^{n-1}(x-a)+a^n=nb^{n-1}(x-b)+b^n \quad -(ㄴ)$

임의의 a,b (단 $0\leq a<b$)에 대해 (ㄴ)의 근이 $\dfrac{a+b}{2}$이므로

$$na^{n-1}\frac{b-a}{2}+a^n=nb^{n-1}\frac{a-b}{2}+b^n$$

$$\frac{n}{2}a^{n-1}b-\frac{n}{2}a^n+a^n=\frac{n}{2}ab^{n-1}-\frac{n}{2}b^n+b^n$$

$$\frac{n}{2}ab(a^{n-2}-b^{n-2})+(1-\frac{n}{2})a^n-(1-\frac{n}{2})b^n=0$$

$\therefore n=2$ ($\because a,b$에 대한 항등식이다.)

$l_a : y-a^2 = 2a(x-a)$ $\quad$ $l_b : y-b^2 = 2b(x-b)$
$(y=2ax-a^2)$ $\quad$ $(y=2bx-b^2)$

$$\int_a^b x^2 dx = \left[\frac{1}{3}x^3\right]_a^b = \frac{1}{3}(b^3-a^3) \qquad -x$$
$$\int_a^{\frac{a+b}{2}} (2ax-a^2)dx = \left[ax^2-a^2x\right]_a^{\frac{a+b}{2}} = -\frac{1}{4}a^3+\frac{1}{4}ab^2 \qquad -y$$
$$\int_{\frac{a+b}{2}}^b (2bx-b^2)dx = \left[bx^2-b^2x\right]_{\frac{a+b}{2}}^b = \frac{1}{4}b^3-\frac{1}{4}a^2b \qquad -z$$

둘러싸인넓이 $= x-y-z$

$$= \frac{1}{12}b^3 - \frac{1}{12}a^3 + \frac{1}{4}a^2b - \frac{1}{4}ab^2$$

(c)
$Q(s, s^4+1)$ 에서의 접선의 방정식은
$l_Q : y-s^4-1 = 4s^3(x-s)$ $\quad (\because g \le 4x^3)$ 이다.

$y=0$일 때 $x = p = \dfrac{3s^4-1}{4s^3} \qquad -(1)$

(d)
(c)와 같은 방법으로 R에서의 접선의 방정식은
$l_R : y-u^4-1 = 4u^3(x-u)$이고,

$y=0$일 때 $x = p = \dfrac{3u^4-1}{4u^3} \qquad -(2)$

이때 $(1)=(2)$이므로 $\dfrac{3s^4-1}{4s^3} = \dfrac{3u^4-1}{4u^3}$이다.
양변을 s에 대해 미분하면

$$\frac{12s^3 4s^3-(3s^4-1)12s^2}{(4s^3)^2} = \frac{12u^3 4u^3-(3u^4-1)12u^2}{(4u^3)^2}\frac{du}{ds}$$

$$\frac{12s^6+12s^2}{16s^6} = \frac{12u^6+12u^2}{16u^6}\frac{du}{ds}$$

$$\frac{3}{4}+\frac{3}{4}\frac{1}{s^4} = \left(\frac{3}{4}+\frac{3}{4}\frac{1}{u^4}\right)\frac{du}{ds}$$

$$\therefore s^4\frac{du}{ds} = \frac{\frac{3}{4}(s^4+1)}{\frac{3}{4}(1+\frac{1}{u^4})} = \frac{s^4+1}{1+\frac{1}{u^4}}$$

$s\to 0$일 때 $|u|\to\infty$이므로 $u^4\to\infty$이다. 따라서

$$\lim_{s\to 0} s^4\frac{du}{ds} = \lim_{s\to 0}\frac{s^4+1}{1+\frac{1}{u^4}} = 1$$

사례 2

(a)
점 $(n+1, 0)$을 지나고 곡선 $y=x^n$과 수직으로 만나는 직선을 l이라고 하자.

직선 l과 $y=x^n$의 교점을 $T(t,t^n)$이라고 하면 T에서의 접선의 방정식은
$y=nt^{n-1}(x-t)+t^n=nt^{n-1}x-(n-1)t^n$이다.
$\therefore l$의 기울기는 $-\dfrac{1}{nt^{n-1}}$이고 l은 $(t,t^n),(n+1,0)$을 지난다 .
따라서 직선 l의 방정식은 다음과 같다.
$l: y=-\dfrac{1}{nt^{n-1}}(x-t)+t^n=-\dfrac{1}{nt^{n-1}}x+\dfrac{1}{nt^{n-2}}+t^n$
이로부터 방정식 $0=-\dfrac{1}{nt^{n-1}}(n+1-t)+t^n$을 얻고 인수분해를 통해서 $nt^{2n-1}+t-n-1=(t-1)(nt^{2n-2}+\cdots+nt+n+1)$를 얻는다. 두 번째 인수는 항상 양수가 되므로 $t=1$이 이 방정식의 유일한 해가 된다.
$\therefore$ 직선의 방정식은 $y=-\dfrac{1}{n}x+\dfrac{1}{n}+1$이다.

(b)
$A'(a,0),B'(b,0)$이므로 $c'(\dfrac{a+b}{2},0)$인 n을 찾는다.
$c(\dfrac{a+b}{2},(\dfrac{a+b}{2})^2)$이다.
A에서의 접선의 방정식 $y=na^{n-1}(x-a)+a^n$
B에서의 접선의 방정식 $y=nb^{n-1}(x-b)+b^n$ 이므로
$na^{n-1}(x-a)+a^n=nb^{x-1}(x-b)+b^n$의 근은 $\dfrac{a+b}{2}$이다.
$na^{n-1}(\dfrac{b-a}{2})+a^n=nb^{n-1}(\dfrac{a-b}{2})+b^n$
$\dfrac{n(b-a)}{2}(a^{n-1}+b^{n-1})+a^n-b^n=0$
$n(ba^{n-1}+b^n-a^n-ab^{n-1})+2a^n-2b^n=0$
$n(ba^{n-1}-ab^{n-1})+(2-n)a^n-(2-n)b^n=0$

$n=2$일 때 위식은 $0\le a<b$인 임의의 두 실수 a,b에 대해 항상 성립한다. $\therefore n=2$이다.

둘러싸인 영역의 면적은
$\displaystyle\int_a^{\frac{a+b}{2}}(x^2-2a(x-a)-a^2)dx+\int_{\frac{a+b}{2}}^{b}(x^2-2b(x-b)-b^2)dx$ 이다
$x^2-2ax+a^2=(x-a)^2$이고 $x^2-2bx+b^2=(x-b)^2$이므로
$\left[\dfrac{1}{3}(x-a)^3\right]_a^{\frac{a+b}{2}}+\left[\dfrac{1}{3}(x-b)^3\right]_{\frac{a+b}{2}}^{b}$가 면적이 된다.
$\dfrac{1}{3}(\dfrac{b-a}{2})^3-\dfrac{1}{3}(\dfrac{a-b}{2})^3 \quad \therefore \dfrac{(b-a)^3}{12}$

(c)
점 $P(p,0)$와 $Q(s,s^2+1)$을 지나는 직선은
$y=\dfrac{s^4+1}{s-p}(x-p)$이다. 점 $Q(s,s^2+1)$에서 곡선에 접하는 직선은
$y=4s^3(x-s)+s^4+1$이다.
두 직선이 일치하므로
$\therefore \dfrac{s^4+1}{s-p}=4s^3$
$s^4+1=4s^4-4s^3p$
$\therefore p=\dfrac{3}{4}s-\dfrac{1}{4s^3}$

(d)

$p=\frac{3}{4}s-\frac{1}{4s^3}$ 이다. 같은 방법으로 $p=\frac{3}{4}u-\frac{1}{4u^3}$ 이다.

$\therefore \frac{3}{4}s-\frac{1}{4s^3}=\frac{3}{4}u-\frac{1}{4u^3}$ 이다.

양변을 s에 대해서 미분하면

$\frac{3}{4}+\frac{3}{4}s^{-4}=\frac{3}{4}\frac{du}{ds}+\frac{3}{4}u^{-4}\frac{du}{ds}$ 이다.

$\therefore \frac{du}{ds}=\frac{1+s^{-4}}{1+u^{-4}}=\frac{u^4s^4+u^4}{u^4s^4+s^4}$

$\therefore \lim_{s\to 0}s^4\times\frac{u^4s^4+u^4}{u^4s^4+s^4}=\lim_{s\to 0}\frac{u^4s^4+u^4}{u^4+1}=\lim_{s\to 0}\frac{u^4}{u^4+1}$

또한 $s\to 0$ 이면 $|u|\to\infty$ 이므로

$\lim_{s\to 0}\frac{u^4}{u^4+1}=\lim_{u\to\infty}\frac{u^4}{u^4+1}=1$ 이다.

$\therefore \lim_{s\to 0}s^4\frac{du}{ds}=1$

사례 3

(a)

점 $(n+1,0)$을 지나고, $y=x^n$과 수직으로 만나는 직선 l이 $y=x^n$과 만나는 교점을 $P(k,k^n)$이라 하자.

$\frac{dy}{dx}=nx^{n-1}$

P에서의 접선의 기울기 : nk^{n-1}

l의 기울기 $=-\frac{1}{nk^{n-1}}$

$l: y=-\frac{1}{nk^{n-1}}(x-k)+k^n$

l이 $(n+1,0)$지나므로 $\frac{-(n+1-k)}{nk^{n-1}}+k^n=0$

$\Leftrightarrow nk^{2n-1}=n+1-k$

$\Leftrightarrow nk^{2n-1}+k=n+1$

$\Leftrightarrow k^{2n-1}+\frac{k}{n}=1+\frac{1}{n}$

$\Leftrightarrow k^{2n-1}-1=\frac{1-k}{n}$

i) $k=1$일 때 : $l: y=-\frac{1}{n}(x+1)+1$

ii) $k\neq 1$일 때 : $0<\frac{1}{n}=\frac{k^{2n-1}-1}{1-k}\leq\frac{1}{2}$ ($\because n$이 2이상의 자연수)

$\Leftrightarrow 0>\frac{k^{2n-1}-1}{k-1}\geq-\frac{1}{2}$

$\frac{k^{2n-1}-1}{k-1}<0$ 에서 $k>1$이면 $k^{2n-1}<1$

$\Rightarrow k<1$이므로 모순

$k<1$이면 $k^{2n-1}>1$

$\Rightarrow k>1$이므로 모순

$\therefore k=1.\quad l: y=-\frac{1}{n}(x-1)+1$

답 : $y=-\frac{1}{n}(x-1)+1$

(b)

B에서의 접선 $y=nb^{n-1}(x-b)+b^n$

A에서의 접선 $y=na^{n-1}(x-a)+a^n$

$C'(\frac{a+b}{2},0)$

C가 A접선, B접선의 교점이므로

$nb^{n-1}(\frac{a-b}{2})+b^n=na^{n-1}(\frac{b-a}{2})+a^n$

$\Leftrightarrow b^n-a^n=n\frac{b-a}{2}(a^{n-1}+b^{n-1})$

$\Leftrightarrow \frac{b^n-a^n}{(b-a)(a^{n-1}+b^{n-1})}=\frac{n}{2}\Leftrightarrow \frac{a^{n-1}+ab^{n-2}+\cdots+b^{n-1}}{a^{n-1}+b^{n-1}}=\frac{n}{2}$

$\therefore n=2$

$\square AA'C'C$의 넓이 = S

$\square CC'B'B$의 넓이 = T

$\int_a^b x^2-S-T$

$=\int_a^b x^2-\int_a^{\frac{a+b}{2}}2a(x-a)+a^2-\int_{\frac{a+b}{2}}^b 2b(x-b)+b^2$

$=\frac{b^3+a^3}{3}-\left[ax^2-a^2x\right]_a^{\frac{a+b}{2}}-\left[bx^2-b^2x\right]_{\frac{a+b}{2}}^b$

$=\frac{(b-a)(b-a)^2}{12}=\frac{(b-a)^3}{12}$

답 : $n=2$, 면적$=\frac{(b-a)^3}{12}$

(c)

$Q(s,s^4+1)$에서 곡선에 접하는 직선의 방정식은

$l: y=4s^3(x-s)+s^4+1$이다. 이 직선이 $P(p,0)$을 지나므로

$4s^3(p-s)+s^4+1=0$이다. 그러므로

$p=\frac{-s^4-1}{4s^3}+s$이다.

답:$p=\frac{3s^4-1}{4s^3}$

(d)

(c)에서 $p=\frac{3s^4-1}{4u^3}$이다.

같은 방법으로 $p=\dfrac{3u^3-1}{4u^3}$ 이다. 따라서

$\dfrac{dp}{du}=\dfrac{3}{4}(1+\dfrac{1}{u^4}),\ \dfrac{dp}{ds}=\dfrac{3}{4}(1+\dfrac{1}{s^4})$ 이다. 따라서

$$\lim_{s\to0}s^4\frac{du}{ds}=\lim_{s\to0}s^4\frac{1+\frac{1}{s^4}}{1+\frac{1}{u^4}}=\lim_{s\to0}\frac{(s^4+1)u^4}{u^4+1}$$

$s\to0$ 일 때 $|u|\to\infty$ 이므로

$\lim_{s\to0}\dfrac{(s^4+1)u^4}{u^4+1}=1$ 이다.

답 : 1

사례 4

(a)

$f(x)=x^n$ 이면, 점 $(t, f(t))$를 지나고 그 점에서 $f(x)$와 수직인 직선의 방정식:

$$y=-\frac{1}{f'(t)}(x-t)+f(t)=-\frac{1}{nt^{n-1}}(x-t)+t^n=-\frac{1}{nt^{n-1}}x+\frac{1}{nt^{n-2}}+t^n \quad (x\text{축 절편}: t^{2n-1}n+t\ )$$

이 직선이 $(n+1,0)$을 지나므로 $\dfrac{1}{nt^{n-1}}(n+1-t)=t^n$ 이다.

$nt^{2n-1}+t-n-1=0$

$\Rightarrow(t-1)(nt^{2n-2}+nt^{2n-3}+\cdots+nt+n+1)=0$

$t=1$ 일 때 $y=x^n$과 수직으로 만나는 직선의 방정식은

$y=-\dfrac{1}{n}(x-1)+1=-\dfrac{1}{n}x+\dfrac{n+1}{n}$

$t\ge0$ 이면 $nt^{2n-2}+nt^{2n-3}+\cdots+nt+n+1>0$ 이고,

$t<0$ 일 때 x축 절편이 음이 되므로 이는 모순이다. 따라서 $t=1$만 가능하다.

(b)

주어진 조건에 의해 $\dfrac{a+b}{2}=c$

A에서의 접선의 방정식 : $y=f'(a)(x-a)+f(a)=na^{n-1}(x-a)+a^n=na^{n-1}x+(1-n)a^n$

B에서의 접선의 방정식 : $y=nb^{n-1}x+(1-n)b^n$

$na^{n-1}c+(1-n)a^n=nb^{n-1}c+(1-n)b^n$ 이므로

$n(a^{n-1}-b^{n-1})c=(1-n)(b^n-a^n)$

$a=0$이라고 하면 $-nb^{n-1}\dfrac{b}{2}=(1-n)b^n\Rightarrow-\dfrac{n}{2}=(1-n)\Rightarrow n=2\ (b\ne0)$

$\therefore n\ne2$ 일 때는 조건 만족 못 함

$n=2$ 일 때 $2\dfrac{a+b}{2}(a-b)=a^2-b^2$ 이므로 조건 만족

$\therefore$ 가능한 n은 2만 존재

A에서 접선 방정식 : $y=2ax-a^2$

B에서 접선 방정식 : $y=2bx-b^2$

$\therefore y=x^2$와 두 접선으로 둘러싸인 넓이

$$\int_a^{\frac{a+b}{2}}x^2-(2ax-a^2)dx+\int_{\frac{a+b}{2}}^b x^2-(2bx-b^2)dx$$

$$=\int_a^b x^2dx+[a^2x-ax^2]_a^{\frac{a+b}{2}}+[b^2x-bx^2]_{\frac{a+b}{2}}^b$$

$= \frac{b^3}{12} - \frac{a^3}{12} + \frac{ab(a-b)}{4}$

(c)

Q에서의 $y = x^4 + 1$에 대한 접선:

$y = 4s^3(x-s) + s^4 + 1 = 4s^3x - 3s^4 + 1$

이 선이 $(p, 0)$을 지나므로 $3s^4 - 1 = 4s^3p$

$p = \frac{3}{4}s - \frac{1}{4s^3}$

(d)

이와 같이 구하면 $p = \frac{3}{4}u - \frac{1}{4u^3}$

$\therefore\ \frac{3}{4}s - \frac{1}{4}s^{-3} = \frac{3}{4}u - \frac{1}{4}u^{-3}$

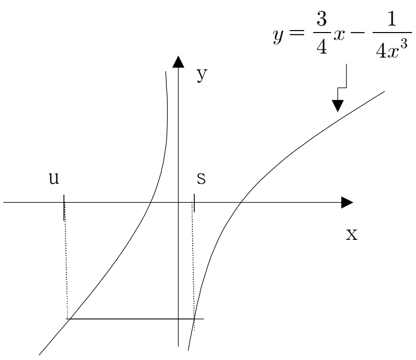
양변을 s에 대해 미분하면

$\frac{3}{4} + \frac{3}{4}s^{-4} = \frac{3}{4}\frac{du}{ds} + \frac{3}{4}u^{-4}\frac{du}{ds}$

$\Rightarrow s^4\frac{du}{ds} = \frac{s^4+1}{1+u^{-4}}$

$f(x) = \frac{3}{4}x - \frac{1}{4x^3}$라고 할 때

$f(s) = f(u)$인데



위의 그래프에서 $s \to +0$ 일 때 $u \to -\infty$, $s \to -0$ 일 때 $u \to \infty$임을 알 수 있다.

$\therefore \lim_{s\to 0} s^4\frac{du}{ds} = \lim_{s\to 0}\frac{s^4+1}{1+u^{-4}} = \frac{\lim_{s\to 0} s^4+1}{\lim_{s\to 0} 1+u^{-4}} = 1$

사례 5

(a)

만나는 점의 좌표를 (k, k^n)이라 하면 직선의 기울기는 $\frac{1}{-nk^{n-1}}$이 된다.

직선의 방정식은 $y = -\frac{1}{nk^{n-1}}(x-k) + k^n$ 이것이 $(n+1, 0)$을 지나므로

$0 = -\frac{1}{nk^{n-1}}(n+1-k) + k^n\ (k \neq 0, n \neq 0)$

$\therefore\ n+1-k = nk^{2n-1}$

$nk^{2n-1}+k-n-1=0$

$(k-1)(nk^{2n-2}+nk^{2n-3}+\cdots nk^{2n-4}\cdots nk+n+1)=0$

$\therefore k=1$

따라서 직선의 방정식은

$$y=-\frac{1}{n}(x-1)+1$$

$$y=-\frac{1}{n}x+\frac{n+1}{n}$$

(b)

$A(a,a^n)$에서의 접선은 $y=na^{n-1}(x-a)+a^n$

$B(b,b^n)$에서의 접선은 $y=nb^{n-1}(x-b)+b^n$

모두 (c,d)를 지나므로

$d=na^{n-1}(c-a)+a^n$, $d=nb^{n-1}(c-b)+b^n$

연립하면,

$nc(a^{n-1}-b^{n-1})=(n-1)(a^n-b^n)$

$a\neq b \quad c=\dfrac{(n-1)(a^n-b^n)}{n(a^{n-1}-b^{n-1})}$

$\overline{A'C}=\overline{CB'}$ 이 되어야 하므로

$c-a=b-c$ 또는 $2c=a+b$이다.

$$c=\frac{(n-1)(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+\cdots+b^{n-1})}{n(a-b)(a^{n-2}+a^{n-3}b+a^{n-1}b^2+\cdots+b^{n-2})}$$

$$\frac{a+b}{2}=\frac{(n-1)(a^{n-1}+\cdots+b^{n-1})}{n(a^{n-2}+a^{n-3}b+\cdots+b^{n-2})}$$

$2(n-1)(a^{n-1}+\cdots+b^{n-1})=n(a+b)(a^{n-2}+\cdots+b^{n-2})$

$=n(a^{n-1}+2a^{n-2}b+2a^{n-3}b^2+\cdots+b^{n-1})$

$\therefore\ na^{n-1}+nb^{n-1}-2(a^{n-1}+a^{n-2}b+\cdots+b^{n-1})=0$

$n(a^{n-1}+b^{n-1})=2(a^{n-1}+\cdots+b^{n-1})$

양변에 $(a-b)$를 곱하면

$n(a^n+ab^{n-1}-a^{n-1}b-b^n)=2(a^n-b^n)$인 항등식을 얻는다.

$n=2$ 일 때 $2(a^2+ab-ab-b^2)=2(a^2-b^2)$이고 $n\neq 2$일 때는 성립하지 않는다.

$\therefore\ n=2$

$y=x^2$ 과 두 접선 $y=2a(x-a)+a^2$ $\quad y=2b(x-b)+b^2$ 으로 둘러싸인 부분의 면적은

$$\int_a^{\frac{a+b}{2}} x^2-2ax+a^2+\int_{\frac{a+b}{2}}^{b} x^2-2bx+b^2$$

$$\left[\frac{(x-a)^3}{3}\right]_a^{\frac{a+b}{2}}+\left[\frac{(x-b)^3}{3}\right]_{\frac{a+b}{2}}^{b}$$

$$=\frac{\frac{1}{8}(b-a)^3}{3}-\frac{\frac{1}{8}(a-b)^3}{3}$$

$$=\frac{2b^3+6ba^2-6b^2a-2a^3}{24}$$

$$=\frac{(b-a)^3}{12}$$

(c)

Q에서 접선은 $y=4s^3(x-s)+t \qquad t=s^4+1$

$\therefore\ y=4s^3x-4s^4+s^4+1$

$y=4s^3x-3s^4+1$

이 직선이 $P(p,0)$을 지나므로 $p\neq 0, s\neq 0$

$4s^3p-3s^4+1=0$

$p=\dfrac{3s^4-1}{4s^3}$

(d)

$$\lim_{s\to 0}s^4\frac{du}{ds}=\lim_{s\to 0}s^4\frac{\frac{dp}{ds}}{\frac{dp}{du}}$$

$p=\dfrac{3}{4}s-\dfrac{1}{4s^3} \qquad \dfrac{dp}{ds}=\dfrac{3}{4}+\dfrac{3}{4}s^{-4}$

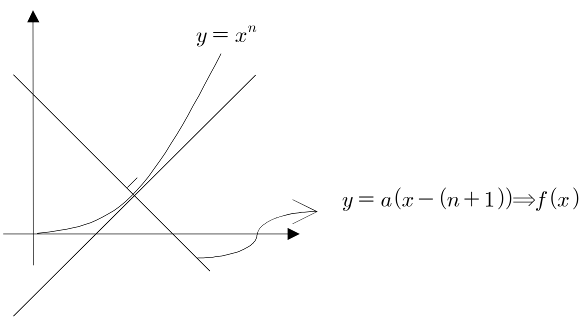
$p=\dfrac{3}{4}u-\dfrac{1}{4u^3} \qquad \dfrac{dp}{du}=\dfrac{3}{4}+\dfrac{3}{4}u^{-4}$

$$\therefore\ \lim_{s\to 0}\frac{\frac{3}{4}s^4(1+s^{-4})}{\frac{3}{4}(1+u^{-4})}=\lim_{s\to 0}\frac{s^4+1}{1+u^{-4}}$$

$s\to 0$ 일 때 $|u|\to\infty$ 이므로 $\lim_{s\to 0}s^4\dfrac{du}{ds}=1$이다.

사례 6

(a)



$(n+1,0)$을 지나고 $y=x^n$과 수직으로 만나는 직선의 방정식을 구해보자.

구하려는 직선의 방정식을 $y=f(x)$라 하고 이 직선과 $y=x^n$가 만나는 점을 (b,b^n) 이라 하자.

$y'=nx^{n-1}$

$\therefore (b,b^n)$에서 접선의 방정식 : $y=nb^{n-1}(x-b)+b^n=nb^{n-1}x-(n-1)b^n$

접선과 $y=f(x)$은 수직이므로 기울기의 곱이 -1

$\therefore\ anb^{n-1}=-1$ ------①

(b,b^n)은 f(x) 위의 점이므로

$a(b-(n+1))=b^n$ ------②

∴ ①, ②에 의해

$a = \frac{b^n}{b-(n+1)} = -\frac{1}{nb^{n-1}}$

$(n+1) - b = nb^{2n-1}$

$\therefore nb^{2n-1} + b - (n+1) = 0$

$(b-1)(nb^{2n-2} + \cdots + nb^2 + nb + (n+1)) = 0$

이 때 $b>0$, $n>0$이므로 $nb^{2n-2} + \cdots + nb^2 + nb + n + 1 \neq 0$

$\therefore b = 1$

$\therefore a = -\frac{1}{n}\ \ f(x) = -\frac{1}{n}(x-(n+1))$

(b)

$y = nb^{n-1}x - (n-1)b^n$

$y = na^{n-1}x - (n-1)a^n$

따라서 C의 x좌표를 구하면

$nb^{n-1}x - (n-1)b^n = na^{n-1}x - (n-1)a^n$

$n(a^{n-1} - b^{n-1})x = (n-1)(a^n - b^n)$

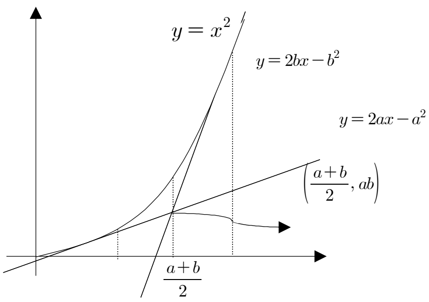
$\therefore\ x = \frac{(n-1)(a^n - b^n)}{n(a^{n-1} - b^{n-1})}$

$\overline{A'C} = \overline{CB'}$이므로

$\frac{a+b}{2} = \frac{(n-1)(a^n - b^n)}{n(a^{n-1} - b^{n-1})}$

임의의 두 실수 a, b에 대하여 성립해야 한다.

$\therefore\ n = 2$ 일 때만 위 식이 항상 성립한다.



$$\therefore\ \int_a^b x^2 dx - \int_a^{\frac{a+b}{2}} 2ax - a^2 dx - \int_{\frac{a+b}{2}}^b 2bx - b^2 dx$$

$$= \frac{1}{3}(b^3 - a^3) - \frac{1}{2}\frac{b-a}{2}(a^2 + ab) - \frac{1}{2}\frac{b-a}{2}(b^2 + ab)$$

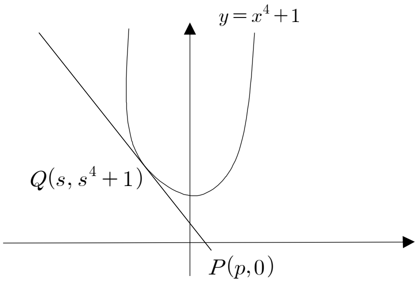
$$= \frac{1}{3}(b^3 - a^3) - \frac{1}{4}(b-a)(a^2 + 2ab + b^2)$$

$$= \frac{1}{12}(4(b-a)(b^2 + ab + a^2) - 3(b-a)(a^2 + 2ab + b^2))$$

$$= \frac{(b-a)}{12}(4b^2 + 4ab + 4a^2 - 3a^2 - 6ab - 3b^2)$$

$$= \frac{b-a}{12}(b^2 - 2ab + a^2) = \frac{1}{12}(b-a)^3$$

(c)



Q에서의 접선의 방정식 : $y=4s^3x-3s^4+1$

$\therefore$ 접선이 P를 지나므로

$4s^3p-3s^4+1=0$

$\therefore p=\dfrac{3s^4-1}{4s^3}$

(d)

p를 u에 대해서 나타내면

$p=\dfrac{3u^4-1}{4u^3}$

$\therefore\ \dfrac{3s^4-1}{4s^3}=\dfrac{3u^4-1}{4u^3}=p$

$3s^4u^3-u^3=3u^4s^3-s^3$ 을 s에 대해 미분하면

$12s^3u^3+9s^4u^2\dfrac{du}{ds}-3u^2\dfrac{du}{ds}=9u^4s^2+12u^3s^3\dfrac{du}{ds}-3s^2$

$12s^3u^3-9u^4s^2+3s^2=(3u^2-9s^4u^2+12u^3s^3)\dfrac{du}{ds}$

$s^2(4su^3-3u^4+1)=u^2(4us^2-3s^4+1)\dfrac{du}{ds}$

$\therefore \lim\limits_{s\to 0}s^4\dfrac{s^2(4su^3-3u^4+1)}{u^2(4us^3-3s^4+1)}=\lim\limits_{s\to 0}\dfrac{s^4+1}{1+\dfrac{1}{u^4}}$

$=1$ ($\because s\to 0$ 일 때 $|u|\to\infty$)

4) 부족 답안의 사례

사례 1

(a)

$x\geq 0$인 구간에서 곡선 $y=x^n$위의 점 (α,α^n)의 접선의 방정식

$l: y=n\alpha^{n-1}(x-\alpha)+\alpha^n=n\alpha^{n-1}x-(n-1)\alpha^n$

$(n+1,0)$을 지나고, $y=x^n$과 수직인 직선을 m이라하면

$m: y=k(x-n-1)$ m이 곡선 위 점 (α,α^n)을 지닌다.

$k=-\dfrac{1}{n\alpha^{n-1}}$ 이므로

$\therefore m=y=-\dfrac{1}{n\alpha^{n-1}}(x-n-1)$

(b)

$y=x^n$위의 점 A를 지나는 직선의 방정식:$y=na^{n-1}(x-a)+a^n$

$y=x^n$위의 점 B를 지나는 직선의 방정식:$y=nb^{n-1}(x-b)+b^n$

두 방정식의 교점이 점 $C(c,d)$

$na^{n-1}(x-a)+a^n=nb^{n-1}(x-b)+b^n$
$nx(a^{n-1}-b^{n-1})=n-1(a^n-b^n)$
$x=\dfrac{n-1}{n}\times\dfrac{a^n-b^n}{a^{n-1}-b^{n-1}}$ $\Rightarrow$ C의 x좌표

$(a+b)\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{n-1}{n}\times\dfrac{a^n-b^n}{a^{n-1}-b^{n-1}}$ $\dfrac{n-1}{n}=\dfrac{a^{n-1}-b^{n-1}}{a^n-b^n}\times\dfrac{1}{2}(a+b)$

$1-\dfrac{1}{n}=\dfrac{a^{n-1}-b^{n-1}}{a^n-b^n}\times\dfrac{1}{2}(a+b)$

$n=\dfrac{2(a^n-b^n)}{(a^{n-1}+b^{n-1})(a-b)}$

$y=x^n$과 두 접선으로 둘러싸인 넓이 S

(c)

점 P를 지나고 $y=x^4+1$에 접하는 직선의 방정식 l을

$y=m(x-p)$라 하면

l은 $Q(s,t)$를 지나므로 $t=m(s-p)$

$Q(s,t)$는 $y=x^4+1$을 지나므로 $t=s^4+1$

$y=x^4+1$위의 점 $Q(s,t)$에서 접선의 방정식 : $y=4s^3(x-s)+t$

$y=4s^3(x-s)+t$와 직선 l과 동일하다.

따라서 직선 l의 기울기 $m=4s^3$

$t=4s^3(s-p)$이므로

$s^4+1=4s^4-4s^3p$

$p=\dfrac{3s^4-1}{4s^3}$

(d)

논제 (c)와 마찬가지로 p를 u에 관한 식으로 나타내면

$p=\dfrac{3u^4-1}{4u^3}$

$\therefore\dfrac{3u^4-1}{4u^3}=\dfrac{3s^4-1}{4s^3}\Rightarrow\dfrac{3}{4}u-\dfrac{1}{4u^3}=\dfrac{3}{4}s-\dfrac{1}{4s^3}$

양변을 s에 관해 미분하면 $\left(\dfrac{3}{4}+\dfrac{1}{12u^4}\right)\dfrac{du}{ds}=\dfrac{3}{4}+\dfrac{1}{12s^4}$

$\dfrac{du}{ds}=\left(\dfrac{9s^4+1}{s^4}\right)\left(\dfrac{u^4}{9u^4+1}\right)$

$\lim\limits_{s\to0}s^4\left(\dfrac{9s^4+1}{s^4}\right)\left(\dfrac{u^4}{9u^4+1}\right)$

i)$s\to+0$ 일 때 $p\to-\infty$이고 $u\to-\infty$

ii)$s\to-0$ 일 때 $p\to\infty$이고 $u\to\infty$

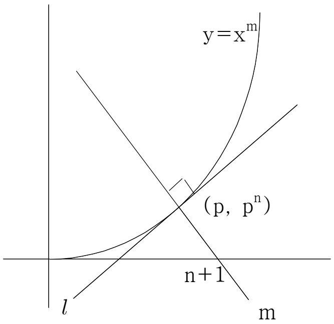
$\lim\limits_{s\to+0}s^4\dfrac{9s^4+1}{s^4}\dfrac{u^4}{9u^4+1}=\lim\limits_{s\to0}\dfrac{9s^4+1}{9+\dfrac{1}{u^4}}=\dfrac{1}{9}$

$\lim\limits_{s\to+0}s^4\times\dfrac{9s^4+1}{s^4}\times\dfrac{u^4}{9u^4+1}=\lim\limits_{s\to+0}\dfrac{9s^4+1}{9+\dfrac{1}{u^4}}=\dfrac{1}{9}$

$\therefore \lim_{s\to 0} s^4 \frac{du}{ds} = \frac{1}{9}$

사례 2

(a)



$l : y = np^{n-1}(x-p)+p^n$

$m : y =-\frac{1}{np^{n-1}}(x-p)+p^n =-\frac{1}{np^{n-1}}(x-(n+1))$

$$\frac{p}{n-p^{n-1}}+p^n = \frac{n+1}{np^{n-1}}$$

$$p^n = \frac{n+1-p}{n-p^{n-1}}$$

$$np^{2n-1} = n+1-p$$

(b)

$\overline{A'C} = \overline{CB'}$ 인 n의 조건은?

$c-a = b-c,\ 2c = a+b$

즉, $c = \frac{1}{2}(a+b)$이어야 한다.

직선 $AC: y = na^{n-1}(x-a)+a^n \quad -(1)$

직선 $CB: y = nb^{n-1}(x-b)+b^n \quad -(2)$

$(1), (2)$의 교점 $x = c$

$$na^{n-1}x - na^n + a^n = nb^{n-1}x - nb^n + b^n$$

$$(na^{n-1} - nb^{n-1})x = n(a^n - b^n) - (a^n - b^n)$$

$$= (n-1)(a^n - b^n)$$

$$\therefore x = \frac{n-1}{n}\frac{a^n - b^n}{a^{n-1} - b^{n-1}} = \frac{1}{2}(a+b)$$

한편 $a^n - b^n = p_n$이라하면

$$p_n = ap_{n-1} + b^{n-1}(p_1 - p_0)$$

$$= ap_{n-1} + b^{n-1}p_1$$

두 접선에 의해 둘러싸인 영역은

$$\int_a^c (x^n - na^{n-1}(x-a) - a^n + a^n n - a^n)dx + \int_c^b (x^n - nb^{n-1}(x-b) - bn)dx$$

$$= \left[\frac{1}{n+1}x^{n+1} - \frac{1}{2}na^{n-1}x^2 + a^n(n-1)x\right]_a^c + \left[\frac{1}{n+1}x^{n+1} - \frac{1}{2}nb^{n-1}x^2 + b^n(n-1)x\right]_c^b$$

$$= \frac{1}{n+1}(c^{n+1} - a^{n+1} + b^{n+1} - c^{n+1}) - \frac{1}{2}n(a^{n-1}a^2 - b^{n-1}b^2 - b^{n-1}c^2) + a^n(n-1)(c-a) + b^n(n-1)(b-c)$$

$$= \frac{1}{n+1}(b^{n+1} - a^{n+1}) - \frac{1}{a}n(a^{n+1} - b^{n+1} + c^2(a^{n-1}b^{n-1})) + (n-1)(c(a^n - b^n) - (a^{n+1} - b^{n+1}))$$

$$= (\frac{1}{A+1} + \frac{3}{2}n - 1)(b^{n+1} - a^{n+1}) + ((1-n)c + \frac{1}{2}nc^2)(a^n - b^n)$$

(이때 $c=\frac{1}{2}(a+b)$)

(c)

$y=m(x-p)$
$x^4+1=mx-mp$
$x^4-mx+mp+1=0$

$m=4s^3+1$ 대입
$s^4-s(4s^3+1)+(4s^3+1)p+1=0$
$(4s^3+1)p=3s^4+s-1$

$\therefore p=\frac{3s^4+s-1}{4s^3+1}$

(d)

한편 $(4s^3+1)(x-s)+s^4+1=(4u^3+1)(x-u)+u^4+1$

$$(4s^3-4u^3)x=3s^4-3u^4$$
$$\therefore x=p=\frac{3s^4-3u^4}{4s^3-4u^3}=\frac{3s^4+s-1}{4s^3+1}$$
$$(3s^4-3u^4)(4s^3+1)=(4s^3-4u^3)(3s^4+s-1)$$
$$(12u^2+12u^3)\frac{du}{ds}=4u^3$$

사례 3

(a)

$y'=nx^{n-1}$이므로 접하는 직선과 기울기의 곱이 -1 이라면 $y=x^n$과 수직으로 만나는 것이므로

$y=x^n$위의 임의의 점 (α,α^n)을 잡으면 이 점을 지나고 $y=x^n$에 수직인 직선의 방정식은 $y=-\frac{1}{n\alpha^{n-1}}(x-\alpha)+\alpha^n$이고 이 직선은 $(n+1,0)$을 지나므로

$0=\alpha-n-1+n\alpha^{2n-1}$을 만족한다. $n\geq 2$이므로

$\log(n+1)=\log\alpha+\log n+(2n-1)\log\alpha$이고

$\log(1+\frac{1}{n})=2n\log\alpha$

따라서 $\alpha=\sqrt[2n]{1+\frac{1}{n}}$ 이다.

구하는 방정식은 $y=-\frac{1}{n\alpha^{n-1}}(x-n-1)$과도 동일하므로

$y=-\frac{1}{\sqrt[2n]{(n^{n+1})(n+1)^{n-1}}}(x-n-1)$이다.

(b)

A에서의 접선의 방정식은 $y=na^{n-1}(x-a)+a^n$이고

B에서의 접선의 방정식은 $y=nb^{n-1}(x-b)+b^n$이고

$\overline{A'C}=\overline{CB'}$이려면 C'값이 $(\frac{a+b}{2},0)$이여야 하므로 두 접선의 교점의 x좌표가 $\frac{a+b}{2}$라는 것을 알 수 있다.

$na^{n-1}(\frac{b-a}{2})+a^n=nb^{n-1}(\frac{a-b}{2})+b^n$이고 정리하면

$n(a^{n-1}(b-a)+b^{n-1}(b-a)=2(b^n-a^n)$

따라서 $n=\frac{2(b^{n-1}+ab^{n-2}+a^2b^{n-3}\cdots a^{n-2}b+a^{n-2})}{b^{n-1}+a^{n-1}}$이다.

접선과 $y=x^n$으로 둘러싸인 부분의 넓이는

$\int_a^b x^n bx - \frac{b-a}{2}\left(\frac{\overline{AA'}+\overline{CC'}}{2}+\frac{\overline{CC'}+\overline{BB'}}{2}\right)$이다.

$\frac{\overline{AA'}+\overline{CC'}}{2}+\frac{\overline{CC'}+\overline{BB'}}{2}=\frac{a^n+b^n+a^n+b^n+\frac{n}{2}(a^{n-1}-b^{n-1})(b-a)}{2}$

따라서 둘러싸인 넓이는

$\frac{1}{n+1}(b^{n+1}-a^{n+1})-\frac{b-a}{2}(a^n+b^n)+\frac{(b-a)^2}{2}\times\frac{n}{4}\times(a^{n-1}-b^{n-1})$

$=\frac{1}{b+1}(b^{n+1}-a^{n+1})-\frac{b-a}{2}(a^n+b^n+\frac{1}{2}(b^n-a^n)(b-a)(a^{n-1}-b^{n-1}))$

(c)

$y'=4x^3$이고

$Q(s,t)$를 지나는 접선의 방정식은

$y=4s^3(x-s)+s^4+1$이다.

P는 x절편이므로 $p=\frac{3s^4-1}{4s^3}$이다.

(d)

$y'=4x^3$이고 $R(u,v)$를 지나는 접선의 방정식은

$y=4u^3x-3u^3+1$이다.

p는 x절편이므로 $p=\frac{3u^4-1}{4u^3}$이다.

따라서 $\frac{3s^4-1}{4s^3}=\frac{3u^4-1}{4u^3}$이고 $12s^4u^3-4u^3=12s^3u^4-4s^3$이다.

이 식을 미분하면 $48u^3s^3ds+36u^2s^4du-12u^2ds=36s^2u^4ds+48s^3u^3du-12s^2ds$이다.

ds로 식을 나누면 $48s^3u^3+36u^2s^4\frac{du}{ds}-12u^2\frac{du}{ds}=36s^2u^4+48s^3u^3\frac{du}{ds}-12s^2$이다.

$\frac{du}{ds}=\frac{4s^3u^3+u^2-3u^2s^4}{4s^3u^3+s^2+3u^4s^2}$ 이고 $\lim_{s\to 0}s^4\frac{du}{ds}=\lim_{s\to 0}\frac{4s^5u^3+s^2u^2-3u^2s^6}{4su+s^2+3u^2}=0$

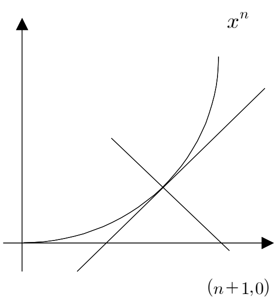
따라서 $\lim_{s\to 0}s^4\frac{du}{ds}=0$이다.

사례 4

(a)

$y=x^n$과 수직으로 만나는 직선의 방정식은 x^n의 접선의 방정식과 수직인 직선을 뜻한다.

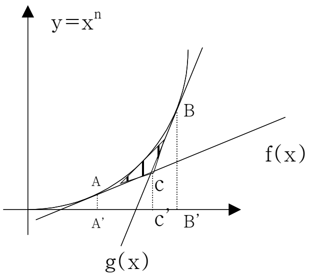
$n\geq 2$인 x^n



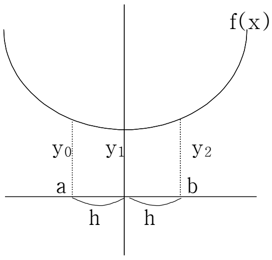
$y=nx^{n-1}(x-n)+n^n$

(b)

$\overline{A'C'} = \overline{C'B'}$



$f(x) = na^{n-1}x - na + a^n$
$g(x) = nb^{n-1}x - nb' + b^n$



$f(x) = na^{n-1}(x-a) + a^n$
$g(x) = nb^{n-1}(x-b) + b^n$

$\int_{A'}^{B'} x^n dx \Rightarrow$

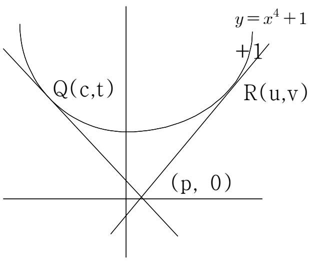
$\int_{A'}^{B'} x^n dx - (\int_{A'}^{C'} f(x)dx + \int_{C'}^{B'} y(x)dx) = S$

$\frac{b-a}{2} = h \quad A'B' = b-a$

$\frac{\frac{b-a}{2}}{3}(a^n + 4d + b^n) =$ 전체 넓이

$\int_{A'}^{C'} f(x)dx + \int_{C'}^{B'} g(x)dx = \left[\frac{na^{n-1}}{2}x^2 + (a^n - na)x\right]_a^c + \left[\frac{nb^{n-1}}{2}x^2 + (b^n n^b)x\right]_c^b$

(c)

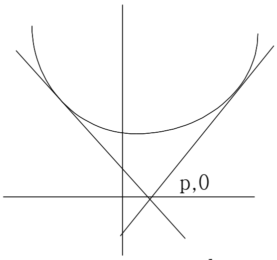


$Q(s, s^4+1) \quad R(u, u^4+1)$

$y - t = 4s^3(x-s)$
$y = 4s^3(x-s) + s^4 + 1$
$o = 4s^3(p-s) + s^4 + 1$
$3s^4 - 1 = 4s^3 p$

$(p, 0)$대입
$4s^3 p - 4s^4 + s^4 + 1 = 0$
$p = \frac{3s^4 - 1}{4s^3}$

(d)



$\lim_{s\to 0} s^4 \frac{dy}{ds} \to \frac{dy}{ds}$는 $\frac{\frac{dt}{dy}}{\frac{dt}{ds}}$ $\quad v=u^4+1$

$y=4u^3(x-u)+v \quad (p,0)$대입

$o=4u^3(p-u)+v=4u^3(p-u)+u^4+1$

$$p=\frac{3u^4-1}{4u^3}$$

$$s^4\frac{dy}{ds}=4s^3\times\frac{\frac{3s^4-1}{p}}{\frac{3u^4-1}{4n^3}}=4s^3\times\frac{p}{4u^3}=\frac{s^3}{u^3}\times p$$

사례 5

(a)

$y=x^n$위의 점 $T(t,t^n)$

여기서의 접선 $y=nt^{n-1}(x-t)+t^n$이고 -(1)

점 T를 지나는 접선이 $(n+1,0)$지나면 된다.

기울기는(접선) $\frac{-t^n}{n+1-t}$

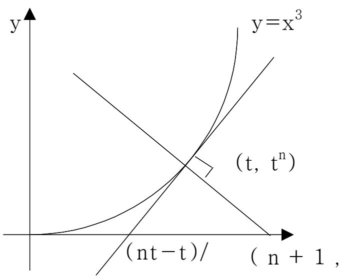
$$\frac{-t^n}{n+1-t}\times nt^{n-1}=-1$$

$$\frac{t^n}{n-t+1}\times nt^{n-1}=1$$

식: $y=\frac{-t^n}{n+1-t}(x-n-1)$

$=-\frac{1}{nt^{n-1}}(x-n-1)$

(b)



점 A에서 접선 $y=f'(a)(x-a)+f(a)$

점 B에서 접선 $y=f'(b)(x-b)+f(b)$

$$x\{f'(a)-f'(b)\}=af'(a)-f(a)-bf'(b)+f(b)$$
$$x=\frac{(n-1)f(a)-f(b)}{f'(a)-f'(b)}=c$$
$$2\times\frac{(n-1)f(a)-f(b)}{f'(a)-f'(b)}=a+b$$
$$(n-1)=\frac{f'(a)-f'(b)}{f'(a)-f(b)}(a+b)$$
$$n=\frac{f'(a)-f'(b)}{2f(a)-f(b)}(a+b)+1$$

넓이는 $\int_a^b x^n dx-\int_a^c f'(a)(x-a)+f(a)dx-\int_c^b f'(b)(x-b)+f(b)dx$

$$\int_a^c f'(a)(x-a)+f(a)dx+\int_c^b f'(b)(x-b)+f(b)dx$$

(c)

$t=s^4+1$. 점Q에서의 접선이 점 P를 지나므로 $4s^3(x-s)+s^4+1=y$가 (p, 0)지남

$$(p-s)4s^3=-(s^4+1)$$
$$p-s=-\frac{s^4+1}{4s^3}=-(\frac{s}{4}+\frac{1}{4s^3})$$
$$p=\frac{3}{4}s-\frac{1}{4s^3}$$

(d)

점 Q에서의 접선 방정식

$y=4s^3(x-s)+s^4+1$

점 R에서의 접선 방정식

$y=4u^3(x-u)+u^4+1$

$4s^3(x-s)+s^4+1=4u^3(x-u)+u^4+1$

$4x(s^3-u^3)=3(s^4-u^4)$ $s\neq u$이므로

$4x(s^2+us+u^2)=3(u+s)(u^2+s^2)$

여기서 $x=p$이므로

$$4p(s^2+us+u^2)=3(u+s)(u^2+s^2). \qquad p=\frac{3}{4}s-\frac{1}{4s^3}$$
$$\left(3s-\frac{1}{s^3}\right)(s^2+us+u^2)=3(u+s)(u^2+s^2)$$
$$3s^3+3us^2+3su^2-\frac{1}{s}-\frac{u}{s^2}-\frac{u^2}{s^3}=3s^3+3u^3+3s^2+3su^2$$
$$3u^3=-\frac{1}{s}-\frac{u}{s^2}-\frac{u^2}{s^3}$$
$$3u^3s^3=-s^2-us-u^2$$

s로 미분하면 $9u^2s^3\frac{du}{ds}+9u^3s^2=-2s-u-s\frac{du}{ds}-2u\frac{du}{ds}$

$$\frac{du}{ds}(9u^2s^3+s+2u)=-9u^3s^2-u-2s$$
$$\frac{du}{ds}=-\frac{9u^3s^2+u+2u}{9u^2s^3+s+2u}$$

$$준식=\lim_{s\to 0}s^4\times\left(-\frac{9u^3s^2+u+2s}{9u^2s^3+s+2u}\right) \qquad 3u^3s^2=-s-u-\frac{u^2}{s}$$

$$=\lim_{s\to 0}s^4\times\left(-\frac{s+2u+\frac{3u^2}{s}}{+u+2s+\frac{3s^2}{4}}\right) \qquad 3u^2s^3=-u-s-\frac{s^2}{u}$$

$$=-\lim_{s\to 0}s^4\frac{(s^2+2us+3s^2)u}{(u^2+2us+3s^2)s} \qquad s^2+2us+u^2=3u^3s^3$$

$$=-\lim_{s\to 0}s^4\times\frac{u}{s}\times\frac{u^2(3us^3+2)}{s^2(3u^3s+2)}$$

$$=-\lim_{s\to 0}u^3s\left(\frac{3us^3+2}{3u^3s+2}\right)$$

사례 6

(a)

$y=x^n$의 도함수는 $y^1=nx^{n-1}$이므로 점 (t,t^n)에서 $y=x^n$과 수직으로 만나는 직선은 $y=-\frac{1}{nt^{n-1}}(x-t)+t^n$이다.

이 직선이 점 $(n+1,0)$을 지나므로 $-\frac{1}{nt^{n-1}}(n+1-t)+t^n=0$, $nt^{2n-1}+t-1=n, n=\frac{1-t}{t^{2n-1}-1}$

(b)

$\overleftrightarrow{AC}$는 $y=na^{n-1}(x-a)+a^n=na^{n-1}x+(1-n)a^n$,

$\overleftrightarrow{BC}$는 $y=nb^{n-1}(x-b)+b^n=nb^{n-1}x+(1-n)b^n$이다.

$na^{n-1}c+(1-n)a^n=nb^{n-1}c+(1-n)b^n$

$n(a^{n-1}-b^{n-1})c=(1-n)(b^n-a^n)$

$\therefore c=\frac{(n-1)(a^n-b^n)}{n(a^{n-1}-b^{n-1})}$

이때 $\overline{A'C}=\overline{B'C}$이므로 $c-a=b-c$, $2c=a+b$

$\frac{2(n-1)(a^n-b^n)}{n(a^{n-1}-b^{n-1})}=a+b$ 이므로

$2(n-1)(a^n-b^n)=n(a^n-ab^{n-1}+ba^{n-1}-b^n)$

$n(a^n-b^n)-2(a^n-b^n)=n(ba^{n-1}-ab^{n-1})$

$(n-2)(a^n-b^n)=abn(a^{n-2}-b^{n-2})$

(c)

$\overrightarrow{PQ}$는 $y=(4s^3)(x-s)+s^4+1$로 나타낼 수 있으며 $P(p,0)$을 지난다.

따라서 $4s^3x-3s^4+1=y, 4s^3p=3s^4+1$이므로

$p=\frac{3s^4+1}{4s^3}$이다. (단, $s\neq 0$)

(d)

$\frac{3s^4+1}{4s^3}=p=\frac{3u^4+1}{4u^3}$, $u^3(3s^4+1)=s^3(3u^4+1)$

이때 양변을 s로 미분하면

$3u^2(3s^4+1)\frac{du}{ds}+u^3 12s^3=3s^2(3u^4+1)+s^3 12u^3\frac{du}{ds}$

$u^2(3s^4+1)-4s^3u^3\frac{du}{ds}=s^2(3u^4+1)-4s^3u^3$

$\therefore \frac{du}{ds}=\frac{s^2(3u^4+1)-4s^3u^3}{u^2(3s^4+1)-4s^3u^3}$

$$\begin{aligned}\lim_{s\to0}s^4\frac{du}{ds}&=\lim_{s\to0}s^4\frac{s^2(3u^4+1)-4s^3u^3}{u^2(3s^4+1)-4s^3u^3}\\&=\lim_{s\to0}\frac{3s^6u^4+s^6-4s^7u^3}{3s^4u^2+u^2-4s^3u^3}\\&=\lim_{s\to0}\frac{s^6}{u^2}\frac{3u^4+1-4u^3}{3s^4+1-4s^3}\\&=\lim_{s\to0}\frac{s^6}{u^2}\end{aligned}$$

<평가>

(a) x축 위의 점 $(n+1,0)$을 지나고 곡선 $y=x^n$에 수직으로 만나는 직선과 곡선 $y=x^n$이 만나는 점을 (α,α^n)이라 하자. (α,α^n)에서 곡선 $y=x^n$에 접하는 접선의 기울기는 $n\alpha^{n-1}$이므로 곡선 $y=x^n$과 수직으로 만나는 직선은 기울기는 $\frac{1}{n\alpha^{n-1}}$이고 이 직선의 방정식은 $y=\frac{-1}{n\alpha^{n-1}}(x-\alpha)+\alpha^n$이다. 이 직선이 점 $(n+1,0)$을 지나므로 $n\alpha^{2n-1}+\alpha-n-1=0$이다. $\alpha=1$이 이 식의 해이므로 구하고자 하는 직선의 방정식은 $y=\frac{-1}{n}(x-1)+1$이다. 구하고자 하는 직선의 방정식이 $y=\frac{-1}{n}(x-1)+1$ 이외에는 없다는 사실까지 설명할 수 있다면 더 좋은 답안이 될 것이다.

(b) $\overline{A'C'}=\overline{C'B'}$ 조건으로부터 얻은 식 $\frac{n-1}{n}(b^n-a^n)=\frac{1}{2}(b+a)(b^{n-1}-a^{n-1})$가 a와 b에 대한 항등식임을 인지하지 못하여 n을 a와 b의 함수로 나타내려고 하는 경우가 많았다.

(c) 미분의 기본 개념을 잘 이해하고 있으면 큰 어려움 없이 해결할 수 있는 문제이다. 잘못된 답안은 대부분 계산 과정의 오류에서 비롯되었다.

(d) 변수 s,t,p의 관계식을 잘못 유도한 경우가 많았다. 변수 s,t,p에 대해 올바른 관계식을 유도한 경우에도 음함수의 미분법, 매개변수로 나타내어진 함수의 미분법을 잘못 적용한 오답도 많았다. s가 0으로 갈 때 u의 절대값이 무한대로 발산함을 인지하지 못한 경우도 있었다.

나) 논제 2(물리)

1) 출제의도

논제 2는 고등학교 교과서 내 물체의 운동역학 부문에서 물체의 2차원 포물선 운동과 충돌에 관한 내용으로, 물체의 등가속도 운동, 등속도 운동, 그리고 완전 비탄성 충돌 시 운동량이 보존되는 물체의 운동에 대한 이해를 시험하고 있다. 이러한 물체의 포물선 운동과 완전비탄성 충돌에 관한 내용을 일부 일선 고등학교에서는 물리Ⅱ 교과서에서 학습하는 부분일 수 있지만, 물리Ⅰ에서 물체의 등가속도 운동, 등속도 운동과 운동량 보존 법칙을 배운 학생은 문제없이 풀이할 수 있다.

2) 논제 해설 및 평가

논제 2의 문항(a): 중력가속도가 일정한 상황에서 2차원 운동을 하는 물체의 운동을 묻고 있다. 물체는 x축 방향으로는 등속도 운동을, y축 방향으로는 등가속도 운동을 한다. 따라서 등속도 운동과 등가속도 운동을 이해하고 수리적으로 정리하면 쉽게 해결할 수 있는 문항이다. 문제의 x축 이동거리 $x(t)$에서 시간 t를 구해 물체의 y축 이동거리를 $y(x)$로 표현하면 $y(x)$가 x의 2차 함수로 표현되므로 포물선 운동을 함을 알 수 있다.

논제 2의 문항(b): 최고점에 도달하는 시간 T는 (a)에서 y축 속도 성분이 0일 때 이므로, T를 (a)에서 구한 x축 및 y축 이동거리에 대입하면 최고점의 좌표 (X,Y)를 v_A와 θ_0의 함수로 표현할 수 있다.

논제 2의 문항(c): 물체 A가 충돌하지 않고 날아갈 때 가장 멀리 가기 위해서는 최고점의 x축 위치 X가 최대가 되어야 한다. 따라서 $2\sin\theta_0\cos\theta_0 = \sin 2\theta_0$의 관계를 이용하여 θ_0를 구할 수 있다.

논제2의 문항(d): 물체 A와 B가 최고점에서 충돌하려면 물체 B는 수직운동만 하므로 물체 A의 y축 속도와 같아야 한다. 이를 활용하면 v_B를 v_A와 θ_0로 표현할 수 있다.

논제2의 문항(d): 물체 A와 B가 최고점에서 완전비탄성 충돌할 경우 운동량은 보존되지만 에너지는 보존되지 않기 때문에 운동량 보존법칙에 의거하여 해결하면 된다. 충돌 전에 물체 A는 x축 속도성분만 가지고 물체 B의 속도성분은 0이므로 완전탄성 충돌 후 물체는 x축 방향으로 운동하고 모멘텀은 $(m+M)V$가 된다. 충돌전의 모멘텀 $Mv_A\cos\theta_0$에서 x축으로 운동하는 충돌 후 물체의 속력 V를 구할 수 있다.

3) 우수답안의 사례

사례 1

(a)

수평방향은 힘을 받지 않으므로 $x(t) = V_A\cos\theta_0 t$ −(1) 이다

그러나 수직방향은 중력을 받으므로 $y(t) = V_A\sin\theta_0 t - \frac{1}{2}gt^2$ −(2) 이다.

여기서 $t = \frac{x(t)}{V_A\cos\theta_0}$이다. 이를 $y(t)$에 대입하면

$$y(t) = V_A\sin\theta_0\frac{x(t)}{V_A\cos\theta_0} - \frac{1}{2}g\left(\frac{x(t)}{V_A\cos\theta_0}\right)^2$$
$$= \tan\theta_0 x(t) - \frac{g}{2V_A^2\cos^2\theta_0}(x(t))^2$$

이므로 위로 볼록한 포물선 궤적을 그린다.

(b)

물체 A가 최고점에 도달하면 t초가 지난후의 수직방향의 속도가 0이 되어야 한다.

$Vy = V_A\sin\theta_0 - gt = 0$ $\qquad t = \frac{V_A\sin\theta_0}{g}$이다. 이를 (1)과 (2)에 대입하자.

$$x(t) = V_A\cos\theta_0\frac{V_A\sin\theta_0}{g} = \frac{V_A^2\sin 2\theta_0}{2g}$$

$$y(t) = V_A\sin\theta_0\frac{V_A\sin\theta_0}{g} - \frac{1}{2}g\frac{V_A^2\sin^2\theta_0}{g^2} = \frac{2V_A^2\sin^2\theta_0 - V_A^2\sin^2\theta_0}{2g} = \frac{V_A^2\sin^2\theta_0}{2g}$$

즉 좌표(x,y)는 $\left(\frac{V_A^2\sin^2\theta_0}{2g}, \frac{V_A^2\sin^2\theta_0}{2g}\right)$이다.

(c)

최고점에 도달하는 시간의 2배 만큼 수평방향으로 이동해야 한다.

즉, $\frac{V_A^2\sin 2\theta_0}{g}$만큼 이동해야 하고 이 식을 최대가 되게 하는θ_0값을 찾으면 된다.

$0 \le \theta_0 \le \frac{\pi}{2}$이므로 $0 \le 2\theta_0 \le \pi$인데 $\sin 2\theta_0$에서 $2\theta_0 = \frac{\pi}{2}$일 때 최대이므로 $\theta_0 = \frac{\pi}{4}$이어야 한다.

(d)
이때의 물체 B는 중력을 받는다. 즉, t초가 지난 후 B가 이동한 거리는 $V_Bt-\frac{1}{2}gt^2$인데 이는 $\frac{V_A^2\sin^2\theta_0}{2g}$과 같다. 충돌했으므로 t는 b에서 구한 것처럼 $\frac{V_A\sin\theta_0}{g}$이다.
그러므로 $V_B=V_A\sin\theta_0$이다.

(e)
완전비탄성 충돌은 두 물체가 서로 충돌한 후에 하나의 물체처럼 운동하는 것을 야기한다. 이때는 운동량이 보존된다.
(b)에서 언급한 것처럼 최고점에서는 수직방향의 속도는 0이므로 수평방향의 속도만 존재한다. 따라서 물체 A는 수평방향의 속도 $V_A\cos\theta_0$이고 물체 B의 속도는 0이다. 운동량이 보존되므로 나중속도를 V'이라고 한다면 $MV_A\cos\theta_0=(M+m)V'$인 셈이다.
$V'=\frac{MV_A\cos\theta_0}{M+m}$이므로 충돌 전의 속력보다 충돌 후의 속력이 더 느리다.

사례 2

(a)
중력가속도가 g이므로 물체 A는 연직방향으로는 가속도 g인 등가속도 운동을 한다.
∴등가속도 운동 공식에 의해
$y(t)=(V_A\sin\theta_0)t-\frac{1}{2}ht^2 \quad -(1)$
x축 방향으로 등속도 운동한다.
$\therefore x(t)=(V_A\cos\theta_0)t \quad -(2)$
(2)에서 $t=\frac{x(t)}{V_A\cos\theta_0} \quad -(3)$
$$(3)->(1);y(t)=\frac{\sin\theta_0}{\cos\theta_0}x(t)-\frac{1}{2}g\frac{(x(t))^2}{V_A\cos^2\theta_0}$$
$$=(\tan\theta_0)x(t)-\frac{g}{2V_A^2\cos^2\theta_0}(x(t))^2$$
∴$y(t)$는 t에 관계없이 항상 $x(t)$에 대한 2차 함수이다.
∴물체 A가 그리는 궤적은 포물선이다.

(b)
y방향 속도의 크기가 0이 되었을 때 최고점에 도달한다. 이때의 시간을 t, 이라 하면
$t_1=\frac{V_A\sin\theta_0}{g} \quad -(1)$
연직방향으로는 등가속도 운동을 하므로 등가속도 운동 공식에 의해
$2(-g)y=o^2-(V_A\sin\theta_0)^2 \quad \therefore y=\frac{V_A^2\sin^2\theta_0}{2g}$
수평방향으로는 t_1 시간동안 등속도 운동하므로
$x=(V_A\cos\theta_0)t_1=\frac{V_A^2\cos\theta_0\sin\theta_0}{g}=\frac{V_A^2\sin2\theta_0}{2g}$
(x,y)는 $(\frac{V_A^2\sin^2\theta_0}{2g},\frac{V_A^2\cos^2\theta_0}{2g})$

(c)
최고점까지 이동하는 데 걸린 시간 t_1의 두배만큼 시간이 흐르면 물체 A는 다시 x축 위에 떨어진다. 이때 수평 도달거리는 물체 A가 수평방향으로 등속도 운동을 하기 때문에
수평도달거리 $S_x=2x=\frac{V_A\sin^2\theta_0}{g}$
이때 s_x는 $\sin^2\theta_0$가 최대 일 때 즉 $\theta_0=\frac{\pi}{4}$일 때 가장 길다.

∴x축 위로 가장 멀리 보내기 위한 각도 $\theta_0 = \frac{\pi}{4}$

(d)
연직방향으로는 두 물체 모두 가속도가 g인 등가속도 운동한다.
∴두 물체가 충돌하려면 질량에 관계없이 연직방향 초기속도가 같아야 한다.
$\therefore V_B = V_A \sin\theta_0$

(e)
연직방향 초기속도가 같으므로 두 물체 모두 (x, y)에서 최고점에 도달한다. 따라서 충돌 직전 물체 A는 수평방향 속도 성분만 존재하고 그 크기는 $V_A \cos\theta_0$이다. 또한 물체 B는 수평방향 초기속도가 0이므로 충돌직전 정지해 있다.
∴운동량 보존법칙에 의해
$M(V_A \cos\theta_0) = (M+m)V'$
$\therefore V' = \frac{M}{M+m}(V_A \cos\theta_0)$
∴두 물체는 충돌 후 합쳐진 후 모두 수평방향 속도 $V' = \frac{M}{M+m}(V_A \cos\theta_0)$로 포물선 운동한다. 이때 충돌 후에는 가속도가 연직 아랫방향 g인 등가속도 운동을 한다.

사례 3

(a)
초기 수평방향속도 : $V_A \cos\theta_0$
초기 수직방향속도 : $V_A \sin\theta_0$
$y(t) = V_A \sin\theta_0 t - \frac{1}{2}gt^2$
$x(t) = V_A \sin\theta_0 t$
$t = \frac{x(t)}{V_A \cos\theta_0}$
$y(t) = \tan\theta_0 x(t) - \frac{1}{2}g\frac{(x(t))^2}{V_A^2 \cos^2\theta_0}$이므로
물체 A는 $y = \tan\theta_0 x - \frac{1}{2}g\frac{1}{V_A^2 \cos^2\theta_0}x^2$의 포물선을 따라 운동한다.

(b)
수직방향 속도=0 이므로
$V_A \sin\theta_0 - gt = 0 \qquad t = \frac{V_A \sin\theta_0}{g}$
$x = \frac{V_A^2 \sin\theta_0 \cos\theta_0}{g}$
$y = (\frac{V_A \sin\theta_0}{g})^2 - \frac{1}{2}(V_A \sin\theta_0)^2$
$= (V_A \sin\theta_0)^2(\frac{1}{g} - \frac{1}{2})$

(c)
포물선은 $x = \frac{V_A^2 \sin\theta_0 \cos\theta_0}{g}$에 대해 대칭이므로 물체 A의 도달거리는
$2 \times \frac{V_A^2 \sin\theta_0 \cos\theta_0}{g} = \frac{V_A^2 \sin 2\theta_0}{g}$이다.
$\sin 2\theta_0 = 1$이 되면 가장 멀리 가므로 $\theta_0 = 45^\circ$

(d)
물체 A의 최고도달시간과 물체 B의 최고점 도달 시간이 같으므로
$\frac{V_B}{g} = \frac{V_A \sin\theta_0}{g}$
$V_B = V_A \sin\theta_0$

(e)
합쳐진 후 x방향 속도:V_x y방향속도:V_y 두 물체의 수평방향 운동량이 보존되므로
$MV_A\cos\theta_0 + m\times 0 = MV_A\cos\theta_0 = (M+m)V_x$
$V_x = \frac{M}{M+m} V_A\cos\theta_0$
두 물체의 수직방향 운동량은 두 물체가 최고점에서 충돌하므로 둘다 수직방향 속력이 0이다.
즉 $M\times 0 + m\times 0 = (M+m)V_y$
$V_y = 0$
두 물체의 속력은 V_x만 존재하므로
$\therefore \frac{M}{M+m} V_A\cos\theta_0$

사례 4

(a)
출발한 후부터는 물체에 가해지는 힘이 중력 밖에 없고, $\therefore \vec{a} = (0, -g)$최초 속도가 $(V_A Cos\theta_0, V_A Sin\theta_0)$이므로 문제 A의 시간에 다른 속도는 $(V_A Cos\theta_0, V_A Sin\theta_0 - tg)$이다.
$\therefore x(t) = V_A\cos\theta_0 \cdot t, y(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + V_A\sin\theta_0 t$
$\therefore y(t) = \frac{-g}{s V_A} cos^2\theta_0 (x(t))^2 + \tan\theta_0 x(t)$
이처럼 y(t)가 x(t)의 2차식으로 표현되므로 물체 A가 그리는 궤적은 포물선이다.

(b)
위 식에서 볼 수 있는 것처럼 물체 A가 그리는 궤적은
$$y = \frac{-g}{2V_A^2\cos^2\theta_0}x^2 + \tan\theta_0 x$$
$$= \frac{-g}{2V_A^2\cos^2\theta_0}(x - \frac{V_A^2\sin\theta_0 \cdot \cos\theta_0}{g})^2 + \frac{V_A^2\sin^2\theta_0}{2g}$$
$$\therefore x = \frac{V_A^2\sin\theta_0 \cdot \cos\theta_0}{g}, y = \frac{V_A^2\sin^2\theta_0}{2g}$$

(c)
물체 A가 다시 χ축에 도달할 때의 χ자표가 최대이려면, $\frac{2V_A^2\sin\theta_0 \cdot \cos\theta_0}{g}$가 최대이어야 한다. 즉, $2\sin\theta_0 \cdot \cos\theta_0 = \sin 2\theta_0$가 최대 이어야 하는 것이다.
$0 < \theta_0 < \frac{\pi}{2}$ 일 때 $\sin 2\theta_0$은 $\theta_0 = \frac{\pi}{4}$일 때 1로서 최대이므로 구하려는 각도 θ_0은 $\frac{\pi}{4}$이다.

(d)
물체 A의 y축 방향의 최초속도와 물체 B의 y축 방향의 최초속도가 같아야 하므로
$V_B = V_A\sin\theta$

(e)
물체 A도, 물체 B도 y축 방향으로 최대로 올라갔을 때 (x,y)에 있으므로 물체 A의 순간속도는 x축 방향으로 $V_A\cos\theta_0$, 물체B는 순간속도가 0이다.

물체A의 운동량은 $MV_A\cos\theta_0$이고 물체 B는 0이므로 합쳐진 후 두 물체의 운동량은 $MV_A\cos\theta_0$이고 속력은 $\frac{M}{m+M}V_A\cos\theta_0$이다. 이후 이 물체는 중력만을 받으므로 시간에 따른 이 물체의 속도는$(\frac{M}{m+M}V_A\cos\theta_0, -tg)$이다.

$\therefore$속력은 $\sqrt{(\frac{M}{m+M})^2V_A^2\cos^2\theta_0+g^2t^2}$라고 할 수 있다.

사례 5

(a)
물체A의 y축 방향으로의 초기속도는 $V_A\sin\theta_0$이다.
$\therefore$t초가 지나면 속도가 $V_A\sin\theta_0+gt$이다.
즉, 가속도가 $-g$이다.
$\therefore y(t)=(V_A\sin\theta_0)t-\frac{1}{2}gt^2$이다. - ①
물체A는 x축방향으로는 $V_A\cos\theta_0$의 속도로 등속도 운동한다.
$\therefore x(t)=(V_A\cos\theta_0)t$이다. - ②
②에서 $t=\frac{x(t)}{V_A\cos\theta_0}$이다.
이를 ①에 대입하면 $y(t)=x(t)\tan\theta_0-\frac{1}{2}g\frac{x(t)}{V_A\cos\theta_0}^2$이다.
따라서 위 식에 의해 물체 A가 그리는 궤적이 포물선이다.

(b)
물체A가 최고점에 도달했을 때 y축 방향으로 속도는 0이므로 $V_A\sin\theta_0-gt=0$이다.
즉 $t=\frac{V_A\sin\theta_0}{g}$이다. 이때

$x(t)=V_A\cos\theta_0\cdot\frac{V_A\sin\theta_0}{g}=\frac{V_A^2\sin\theta_0\cos\theta_0}{g}$ 이고

$y(t)=V_A\sin\theta_0\cdot\frac{V_A\sin\theta_0}{g}-\frac{1}{2}\cdot g\cdot(\frac{V_A\sin\theta_0}{g})^2=\frac{V_A\sin^2\theta_0}{2g}$이다.

$\therefore x(t)=\frac{V_A^2\sin\theta_0\cos\theta_0}{g}$이고 $y(t)=\frac{V_A^2\sin^2\theta_0}{2g}$이다.

(c)
(b)에서$\therefore x(t)=\frac{V_A^2\sin\theta_0\cos\theta_0}{g}=\frac{1}{2}\cdot\frac{V_A^2\sin2\theta_0}{g}(\because\sin2\theta=2\sin\theta\cos\theta)$라고 구했다.
$\therefore x(t)$의 최대값은 $\sin2\theta_0=1$ 즉
$2\theta_0=\frac{\pi}{2}$일 때 최대이다. 그러므로 $\theta_0=\frac{\pi}{4}$이다.

(d)
물체 A와 B는 동시에 출발해 물체 A가 최고점에 도달할 때 충돌한다. 즉, y축 방향으로 같은 시간에 같은 거리만큼 운동했다. 모두 −y축 방향으로 가속도 −g를 받았으므로 V_B는 물체A의 y축 방향으로의 속도, 즉 $V_A\sin\theta_0$과 같다.
$\therefore V_B=V_A\sin\theta_0$이다

(e)
(a)(b)에 의해 충돌 직전에 (즉, (x,y)에서) A는 x축 방향으로의 속도는 $V_A\cos\theta_0$이고 y축 방향으로의 속도는 0 이다. 또한 (d)

에서 $\therefore V_B = V_A \sin\theta_0$라 구했으므로 최고점에서는 속도가 0이다.
∴A와B가 비탄성충돌 후 V'라는 속도로 움직인다고 하면
$(M+m)V' = M \cdot (V_A \cos\theta_0)$이다.
두 물체 모두 y축 방향으로의 속도가 0이므로 두 물체는 충돌 후 $\frac{M}{M+m} V_A \cos\theta_A$의 속력으로 움직인다.

사례 6

(a)
x(t)와 y(t)는 같은 시간을(t) 공유한다. 물체 A의 초기속도는 x축 방향 : $+V_A \cos\theta_0$(위방향+)
y축 방향 : $+V_A \sin\theta_0$(오른쪽+)이므로
i)y축 방향. A는 −g의 가속도가 일정한 등가속도운동을 한다.
공식에 의해 $y(t) = V_A \sin\theta_0 t + \frac{1}{2}(-g)t^2$ − ①
ii)x축 방향. 가속도가 0인 등속도운동을 한다.
$x(t) = V_A \cos\theta_0 \cdot t$ − ②

②에서 $t = \frac{x(t)}{V_A \cos\theta_0}$이므로 이를 ①에 대입하여
$y(t) = V_A \sin\theta_0 \cdot \frac{x(t)}{V_A \cos\theta_0} + \frac{1}{2}(-g)(\frac{x(t)}{V_A \cos\theta_0})^2$ − ③
$= -\frac{g}{2V_A \cos^2\theta_0}(x(t))^2 + \frac{\sin\theta_0}{\cos\theta_0} x(t)$
③에서 g, V_A, θ_0는 상수이므로 y(t)는 x(t)의 이차함수로 표현됨을 알 수 있다.
따라서 물체 A의 궤적은 포물선이다.

(b)
(최고점에 도달했을 때 y축 방향속도가 0이므로) 시간 t에 대해
i)y축 방향 등가속도 운동이므로
공식에 의해 $0 = V_A \sin\theta_0 + (-g)t,\ t = \frac{V_A \sin\theta_0}{g}$ − ㉠
또한, $2(-g)y = -(V_A \sin\theta_0)^2$
$\therefore y = \frac{V_A^2 \sin^2\theta_0}{2g}$로 표현된다. − ㉡

ii)x축방향 운동에서는 y축방향 t인 ㉠이 공유된다.
등속도운동이므로 $s = v - t$에 의해
$x = V_A \cos\theta_0 \cdot \frac{V_A \sin\theta_0}{g}$
$\therefore x = \frac{V_A \sin^2\theta_0}{2g}$로 표현된다.

(c)
x가 최대일 때 문제 상황을 만족한다. 이때 g, V_A는 상수이므로
즉, $x = \frac{V_A^2}{2g} sin\theta_0 = 1$일 때 이므로 $\therefore \theta_0 = 45^\circ$

(d)
B는 −g의 가속도로 등가속운동을 하고 (x, y)에서 속도는 0이므로
$2(-g)y = 0^2 - (V_B)^2$.

y는 (b)의 (c)과정에 의해 $y = \frac{V_A \sin^2\theta}{2g}$ 이므로

$V_B^2 = 2g \cdot \frac{V_A^2 \sin^2\theta_0}{2g}$

$\therefore V_B = V_A \sin\theta_0$

(e)

비탄성 충돌에서 운동량은 보존된다.

i)(x,y)에서 충돌시 y축 방향 속도는 A와 B모두에서 0이므로 y축 방향 속도는 0 이다.

ii)x축 방향으로 B는 0의 속도를, +방향으로 A는 $V_A\cos\theta_0$를 갖는다.

운동량보존에 의해 (나중속도 v'이라 하자)

$MV_A\cos\theta_0 + 0 = (M+m)V'$

$\therefore V' = \frac{MV_A\cos\theta_0}{(M+m)}$ −Ⓐ

즉, 이물체는 (x,y)점에서 +x방향으로 v'의 초기속도를 갖고, y축 방향으로 −g의 가속도가 작용하는 등가속도 운동을 하게 된다. 따라서 충돌 후 지난 시간을 t'이라하면 속도는

i)x축 방향 : $V' = \frac{MV_A\cos\theta_0}{M+m}$

ii)y축 방향 : $V'' = 0 \pm gt'$

벡터만에 의하여 물체의 속력(V_{tot})은

$V_{tot} = \sqrt{(V')^2 + (V'')^2}$

$= \sqrt{(\frac{MV_A\cos\theta_0}{M+m})^2 + (-gt)^2}$

즉, 시간이 지날수록 두 물체의 속력은 증가한다.

<평가>

(a) 물체의 x축 및 y축 운동이 등속도 및 등가속도 운동임을 이용하고, 시간 t를 소거하여 구한 학생들이 우수한 답안을 작성하였다. 이때 $y(x) = x\tan(\theta_0) - \frac{1}{2}g\left(\frac{x}{v_A\cos\theta_0}\right)^2$ 까지 구하면 만점을 받을 수 있다.

(b) 물체 A가 최고점에 도달했을 때 y축 속도가 0으로부터 걸린 시간을 구하면 $T = \frac{v_A\sin\theta_0}{g}$를 알게 되고 이를 x축 및 y축 좌표에 대입하면 최고점의 위치(X, Y)를 구할 수 있다. $X = \frac{v_A^2\sin\theta_0\cos\theta_0}{g} = \frac{v_A^2\sin2\theta_0}{2g}$, $Y = \frac{v_A^2\sin^2(\theta_0)}{g}$ 를 정확히 구한 학생들은 좋은 점수를 받을 수 있다.

(c) 물체 A가 충돌하지 않고 가장 멀리 날아가려면, (b)에서 구한 최고점에서의 x축의 좌표 X가 최댓값을 가져야 한다는 생각을 하면 문제를 쉽게 해결할 수 있다. (b)에서 X는 $\sin2\theta_0 = 1$일 때 최곳값을 가지므로 $\theta_0 = \frac{\pi}{4}$rad 또는 45도를 구하면 높은 점수를 받을 수 있다. 여기서 단위까지 정확히 써야 최고 점수를 받는다.

(d) 물체 A와 B가 최고점에서 충돌하려면 물체 B는 수직운동만 하므로 물체 A의 y축 속도와 같아야 한다. 이를 활용하면 물체 B의 속도는 $v_B = v_a\sin\theta_0$가 되며, 이 문제의 뜻을 이해한 많은 학생들이 높은 점수를 받았다.

(e) 물체 A와 B가 최고점에서 완전비탄성 충돌할 경우 운동량은 보존되지만 에너지는 보존되지 않기 때문에 운동량 보존법칙에 의거하여 해결하면 된다. 충돌 전에 물체 A는 x축 속도성분만 가지고 물체 B의 속도성분은 0이므로 완전탄성 충돌 후 물체는 x축 방향으로 운동하고 모멘텀은 $(m+M)V$가 된다. 충돌전의 모멘텀

$Mv_A\cos\theta_0$에서 x축으로 운동하는 충돌 후 물체의 속력 V를 구하면 $V=\dfrac{M}{M+m}v_A\cos\theta_0$가 되며, 충돌 후 물체는 x축 방향으로 운동하며 속력의 크기를 구한 학생들이 높은 점수를 받았다.

4) 부족 답안의 사례

사례 1

(a)

$t>0$일 때

물체 A의 높이 $y(t)$와 x축 좌표 $x(t)$의 관계를 구해 물체 A가 그리는 궤적이 포물선이 되는지를 보이자.

속도 $\overrightarrow{V_A}$를 x축 성분과 y축 성분으로 나누면

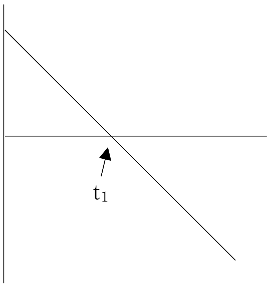
초기 $\overrightarrow{V_A}= V_A\cos\theta_0$

초기 $\overrightarrow{V_y}= V_A\cos\theta_0 \quad (0<\theta_0<\frac{\pi}{2})$

x축 방향으로는 등속직선운동을 하므로

x축 좌표 $x(t)= V_A\cos\theta_0 t$

y축 방향으로는 일정한 중력을 받아 중력가속도의 운동을 한다.



그래프를 그리면

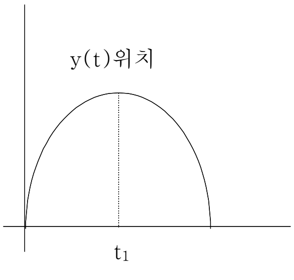
초기속도 $V_A\sin\theta_0$

기울기 $-g$

$t_1=\dfrac{V_A\sin\theta_0}{g}$

$\overrightarrow{V_y}= V_A\sin\theta_0-gt$

$\therefore y$축 좌표 $y(t)= V_A\sin\theta_0 t-\dfrac{1}{2}gt^2 \quad (t<\dfrac{V_A\sin\theta_0}{g})$



$(t>\dfrac{V_A\sin\theta_0}{g})$

$$y(t)=\left[\frac{V_A^2\sin^2\theta_0}{g}-\frac{1}{2}gt^2\right]-\{y(t-t_1)\}$$
$$=\frac{V_A^2\sin^2\theta_0}{g}-\frac{1}{2}gt^2-\frac{V_A^2\sin^2\theta_0}{g}+\frac{1}{2}g(t-\frac{V_A\sin\theta_0}{g})^2$$
$$=\frac{1}{2}g(t-\frac{V_A\sin\theta_0}{g})^2-\frac{1}{2}gt^2$$

$\therefore$A가 그리는 궤적은

(b)

물체 A가 최고점에 도달했을 때는 (a)에서 보였듯이

$t=\dfrac{V_A\sin\theta_0}{g}$ 일때다. ($\because$ y축 방향속도가 0일 때)

$\therefore$ 최고점의 물체A의 좌표(x, y)

$x=V_A\cos\theta_0 t=\dfrac{V_A^2\cos\theta_0\sin\theta_0}{g}$

$y=\dfrac{V_A^2\sin\theta_0}{g}-\dfrac{1}{2}g\left(\dfrac{V_A\sin\theta_0}{g}\right)^2$

$=\dfrac{V_A^2\sin^2\theta_0}{2g}$

(c)

물체 V_B의 발사 후 t로의 위치를 표현하면 x축 좌표는 x이며 y축 좌표는 $(V_B-g)t$이다.

물체 A를 제일 멀리 보내기 위해서는 최고점에 도달했을 때의 물체 A의 x좌표 X가 최대일때이다.

$X=\dfrac{V_A^2\sin\theta_0\cos\theta_0}{g}$ 가 최대일때다.

$\dfrac{V_A^2\sin\theta_0\cos\theta_0}{g}=\dfrac{V_A^2\sin2\theta_0}{2g}$ 이며

V_A와 g값은 정해져 있으므로 X가 최대일때는 $\sin2\theta_0$가 최대일 때다.

$0<\theta_0<\dfrac{\pi}{2}$에서 $\sin2\theta_0$를 최대로 만드는 값은

$\sin2\theta_0=1$

즉 $2\theta_0=\dfrac{\pi}{2}$

$\therefore\theta_0=\dfrac{\pi}{4}$

x축 위로 가장 멀리 보내기 위한 각도 $\theta_0=45^\circ$ 이다.

(d)

물체 B가 상승하면서 (x, y)에서 A와 충돌하였으면 $t=\dfrac{V_A\sin\theta_0}{g}$ 일 때 두 물체가 최고점 Y에서 만난 것이다.

(c)에서 V_B의 위치 $x(t)=X$
$y(t)=(V_B-g)t$

$y(t)=(V_B-g)t$에 $t=\dfrac{V_A\sin\theta_0}{g}$를 대입해보자.

$Y=(V_B-g)\dfrac{V_A\sin\theta_0}{g}=\dfrac{V_A^2\sin^2\theta_0}{2g}$

이를 정리하면

$V_A\sin\theta_0\left(\dfrac{V_A\sin\theta_0}{2g}+1-\dfrac{V_B}{g}\right)=0$

$V_A\sin\theta_0\neq0$ 이므로 $\dfrac{V_A\sin\theta_0+2g}{2g}=\dfrac{V_B}{g}$

$\dfrac{V_A\sin\theta_0}{2}+g=V_B$

(e)

두 물체가 완전 비탄성 충돌한다고 가정하자.

운동량보존법칙을 이용하면 $MV_1+mV_2=(M+m)V$. 구하고자 하는 합쳐진 물체의 속력은 V이다.

V_1, V_2 는 모두 충돌시 속력이다.

$V_1=\sqrt{Vx^2+Vy^2}=V_A\cos\theta_0$ ($\because Vy=0$)

$V_2=V_B=\dfrac{V_A\sin\theta_0}{2}+g$

$$\frac{MV_A\cos\theta_0 + m(\frac{V_A\sin\theta_0}{2} + g)}{M+m} = V$$

$$\therefore V = \frac{MV_x + mV_B}{M+m}$$

사례 2

(a)

x축 방향으로의 초기속도는 $V_a\cos\theta_0$이고 y축 방향으로의 초기속도는 $V_a\sin\theta_0$이다. 이때 y축 방향으로의 속도는 -g의 가속도를 가지고 x축 방향으로의 속도는 가속도가 0이다.

따라서 $y(t) = V_a\sin\theta_0 t - \frac{1}{2}gt^2$이고 $x(t) = V_a\cos\theta_0 t$이다.

$t = \frac{x(t)}{V_a\cos\theta_0}$에서 $y(t) = \tan\theta x(t) - \frac{1}{2}g\frac{\{x(t)\}^2}{V_a^2\cos^2\theta_0}$이다.

이때 물체의 좌표가 그리는 궤적은 $y = xtan\theta_0 - \frac{1}{2}g\frac{x^2}{V_a^2\cos^2\theta}$이므로 포물선이 된다.

(b)

t에서 y축 방향으로의 속도는 $V_a\sin\theta_0 - gt$이다.

속도가 0일 때 최고높이 이므로 그때의 시간 $t = \frac{V_a\sin\theta_0}{g}$이고 높이는 $V_a\sin\theta_0 \times \frac{V_a\sin\theta_0}{g} - \frac{1}{2}g \times \frac{V_a^2\sin^2\theta_0}{g^2} = \frac{V_a^2\sin^2\theta_0}{2g}$이고

x좌표는 $V_a\sin\theta_0 \times \frac{V_a\sin\theta_0}{g} = \frac{V_a^2\sin2\theta_0}{2g}$이다.

따라서 A의 좌표는 $(\frac{V_a^2\sin2\theta_0}{2g}, \frac{V_a^2\sin^2\theta_0}{2g})$이다.

$x = \frac{V_a^2\sin2\theta_0}{2g}, y = \frac{V_a^2\sin^2\theta_0}{2g}$

(c)

포물선은 꼭짓점을 지나고 x축에 수직인 직선에 대해 대칭이다. 따라서 A의 최대거리는 최대높이에서 x좌표의 두 배인 $\frac{V_a^2\sin2\theta_0}{g}$이다. 이때, $\frac{V_a^2\sin^2\theta_0}{g}$가 최대인 각도 θ_0는 45°이다.

(d)

물체 B의 초기속도는 V_B이고 가속도는 $-g$이다. 따라서 시간 t에서의 물체 B의 높이는 $V_Bt - \frac{1}{2}gt^2$이다. 물체A의 x좌표가 x라 하면

사례 3

(a)

물체 A의 운동 상태를 살펴보면

$V_A(V_A\cos\theta, V_A\sin\theta - gt)$이다.

변위는 $\overrightarrow{S_A}(V_A\cos\theta t, V_A\sin\theta t - \frac{1}{2}gt^2)$이다.

매개변수 t를 소거하여 정리하면 포물선 관계식이 나온다.

$V_A\cos\theta t = x \rightarrow t = \dfrac{x}{V_A\cos\theta}$

$V_A\sin\theta t - \dfrac{1}{2}gt^2 = y = \tan t x - \dfrac{g}{2}\times\dfrac{x^2}{V_A\cos^2\theta}$

$\therefore y = \tan\theta x - \dfrac{gx^2}{2V_A^2\cos^2\theta}$

(b)

물체 A가 최고점에 도달할 때 y축 속도 성분이 0이 되는 시간임을 이용한다.

그 시간은 $t = \dfrac{V_A\sin\theta}{g}$ 이다. 따라서 좌표는

$\overrightarrow{S_A}(x, y) = \left(\dfrac{V_A^2\sin 2\theta}{2g}, \dfrac{V_A^2\sin^2\theta}{2g}\right)$이다.

(c)

논제 (b)에서 최고점에 도달한 x축 성분의 2배 만큼을 갈 것이다.

$\therefore \dfrac{V_A\sin 2\theta}{2g}\times 2 = \dfrac{V_A\sin 2\theta}{g}$ 이걸 수평도달거리라 한다.

(d)

충돌한다는 말은 시간이 같다 -> 같은 시간동안 같은 높이를 올라갔다! y축 성분만 따져주자.

물체 B의 운동상태는 $V_B(0,\ V_B - gt)$

$\overrightarrow{S_B}(0,\ V_Bt + \dfrac{1}{2}gt^2)$

논제 (b)에서 구한 시간을 활용하자

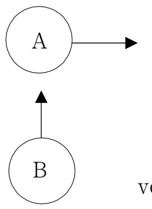
$$h = V_B\frac{V_A\sin\theta}{g} - g\frac{V_A\sin\theta}{g} = \frac{V_A^2\sin^2\theta}{2g}$$

$$\frac{V_BV_A\sin\theta}{g} = \frac{V_A\sin\theta(2g + V_A\sin\theta)}{2g}$$

$$\therefore V_B = \frac{2g + V_A\sin\theta}{2}$$

(e)

운동량 충격량과 vector 의 방향을 계산하여 문제를 해결하자. 운동상황을 simulation 걸어보면 충돌지점의 운동상태는

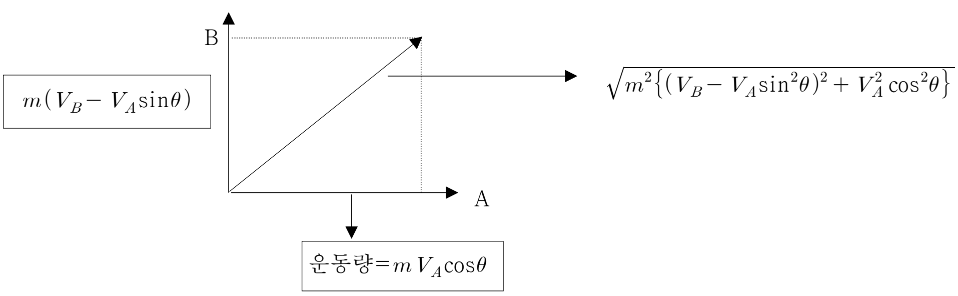


$V_A = V_A\cos\theta$ 질량 m

$V_B = V_B - g\times\dfrac{V_A\sin\theta}{g}$

$= V_B - V_A\sin\theta$

vector를 합성해보면 (운동량을 나타낸 vector다)



따라서 운동량 보존의 법칙에 의해

$m\sqrt{(V_B - V_A\sin\theta)^2 + V_A^2\cos^2\theta} = 2m$

논제 (d)에서 $V_B = g + \frac{V_A \sin\theta}{2}$임을 이용하여 정리하면

$\therefore \frac{1}{2}\sqrt{(g - \frac{V_A \sin\theta}{2})^2 + V_A^2 \cos^2\theta} = \frac{1}{2}\sqrt{g^2 - V_A \sin\theta + V_A^2}$

사례 4

(a)
물체A는 수직 방향으로 중력만 작용하므로

$y(t) = V_A \sin\theta_0 - \frac{1}{2}gt^3$

$x(t) = V_A \cos\theta_0 t$

x축 방향으로는 등속도 운동.
y축 방향으로는 등가속도운동을 하므로 물체 A가 그리는 궤적은 포물선이다.

(b)
t초 일때의 y축 방향의 속력을 v(t)라 하면

$V(t) = V_0 + at$
$\quad = V_A \sin\theta_0 - gt$

물체 A가 최고점에 도달했을 때의 y축 방향의 속력은0

$\therefore 0 = V_A \sin\theta_0 - gt$

$t = \frac{V_A \sin\theta_0}{g}$

(a)에서 구한 식을 사용하면 (x,y)에서

x: $V_A \cos\theta_0 \times \frac{V_A \sin\theta_0}{g} = \frac{V_A^2 \sin\theta_0 \cdot \cos\theta_0}{g}$

y: $V_A \sin\theta_0 - \frac{1}{2} \cdot g \cdot \frac{V_A^3 \sin^3\theta_0}{g^3} = V_A \sin\theta_0 - \frac{V_A^3 \cdot \sin^3\theta_0}{2g^2}$

(c)
물체A가 날아가는 길이를 s(x)라 하면 최고점까지의 시간 t가 $\frac{V_A \sin\theta_0}{g}$이므로 땅에 도달할 때까지의 시간은 $2t = \frac{2V_A \sin\theta_0}{g}$이다

$\therefore s(x) = V_A \cos\theta_0 \times st$
$\quad = \frac{2V_A \sin\theta_0 \cos\theta_0}{g} = \frac{V_A^2 \sin^2\theta_0}{g}$

$0 < \theta_0 < \frac{\pi}{2}$ 이므로 $0 < 2\theta_0 < \pi$

(d)물체 A가 최고점 (x,y)에 도달했을 때의 높이를 h'(x)라 하면

$h'(x) = V_A \sin\theta_0 - \frac{V_A^3 \cdot \sin^3\theta_0}{2g^2}$

물체 A와B가 (x,y)에서 충돌하려면 $t = \frac{V_A \sin\theta_0}{g}$에서의 높이가 같아야 한다.

$h'(x) = h(x)$

$V_A \sin\theta_0 - \frac{V_A^3 \cdot \sin^3\theta_0}{2g^2} = \frac{V_A \cdot V_B \cdot \sin\theta_0}{g} - \frac{V_A^2 \sin^2\theta_0}{2g}$

양변을 $V_A \sin\theta_0$으로 나누면

$1 - \frac{V_A^2 \sin^2\theta_0}{2g^2} = \frac{V_B}{g} - \frac{V_A \sin\theta_0}{2g}$

$$\frac{V_B}{g}=1-\frac{V_A^2\sin^2\theta_0}{2g^2}+\frac{V_A\sin\theta_0}{2g}$$

$$=\frac{2g^2+V_A\cdot\sin\theta_0\cdot g-V_A^2\sin^2\theta_0}{2g^2}$$

$$\therefore V_B=\frac{2g^2+V_A\cdot\sin\theta_0\cdot g-V_A^2\sin^2\theta_0}{2g^2}$$

(e)
운동량 p는 보존된다.
물체A의 x축 방향운동량= $MV_A\cos\theta_0$
물체A의 y축 방향운동량= $M(V_A\sin\theta_0-gt)$
물체B의 x축 방향운동량=0
물체B의 y축 방향운동량= $m(V_B-gt)$
완전비탄성 충돌로 합쳐진 물체의 x축방향 속력은 V_x, y축 방향 속력은 V_y라 하면

$$(M+m)V_x=MV_A\cos\theta_0$$

$$\therefore V_x=\frac{MV_A\cos\theta_0}{M+m}$$

$$(M+m)V_y=MV_A\sin\theta_0+mV_B-gt(M+m)$$

$$\therefore V_y=\frac{MV_A\sin\theta_0+mV_B}{M+m}-gt$$

사례 5

(a)
t초 후 $x(t)=v_a t cos\theta_0$
y(t)에서의 속력 $v=v_A\sin\theta_0-gt$

$$-2gy(t)=v_A^2\sin\theta_0^2-2gv_A\sin\theta_0 t+g^2t^2-v_A\sin^2\theta_0^2$$

$$=gt^2-2gv_A\sin\theta_0 t$$

$$y(t)=v_A\sin\theta_0 t-\frac{t^2}{2}$$

$$\frac{x(t)}{v_A\cos\theta_0}=v_A\sin\theta_0+\sqrt{v_A^2\sin^2\theta-2y(t)}$$

$$\left(\frac{x(t)}{v_A\cos\theta_0}-v_A\sin\theta_0\right)^2=-2y(t)+v_A^2\sin^2\theta_0$$

∴A가 그리는 궤적은 포물선

(b)
$v_A\sin\theta_0-gt=0$일 때 최고점

$$t=\frac{v_A\sin\theta_0}{g}$$

$$X=v_A\cos\theta_0\times\frac{v_A\sin\theta_0}{g}=\frac{v_A^2\cos\theta_0\sin\theta_0}{g}$$

$$Y=\frac{v_A^2\sin^2\theta_0}{g}-\frac{1}{2}g\times\frac{v_A^2\sin^2\theta_0}{g^2}$$

$$=\frac{v_A^2\sin^2\theta_0}{2g}$$

(c)

$$\int_0^g\sqrt{1-t^2v_A\sin\theta_0 t}$$

(d)

$Y = v_b t - \frac{1}{2}gt^2$ (b)에서 구했듯 $t = \frac{v_A \sin\theta_0}{g}$ 이므로

$\frac{v_A^2 \sin^2\theta_0^2}{2g} = v_B \times \frac{v_A \sin\theta_0}{g} - \frac{1}{2} g \times \frac{v_A^2 \sin^2\theta}{g^2}$

$\frac{v_A^2 \sin^2\theta_0^2}{g} = v_B \times \frac{v_A \sin\theta_0}{g}$

$v_B = v_A \sin\theta_0$

(e)

공백

사례 6

(a)

초기속력 V_A로 발사될 때 x축 방향으로 $V_A\cos\theta_0$, y축 방향으로 $V_A\sin\theta_0$의 속력으로 운동한다. 이때 x축 방향으로는 알짜 힘이 0이므로 등속도 운동을 하고 y축 방향으로는 중력가속도로 인해 $-y$방향으로 일정한 힘이 작용하므로 등가속도 운동을 한다. 따라서 물체 A의 높이 $y(t)$는 증가하였다가 감소하고 x축 좌표 $x(t)$는 일정하게 증가하므로 시간 t>0일 때 물체 A가 그리는 궤적은 포물선이다.

(b)

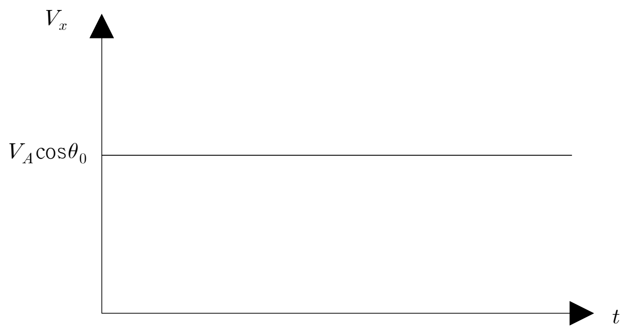


표1

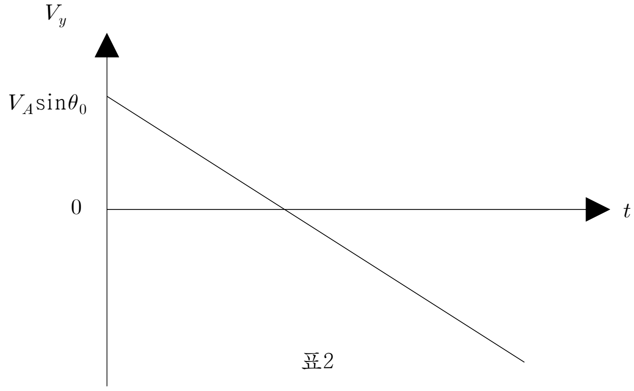


표2

표2에서 기울기는 중력 가속도인 g 이므로 최고점에 도달한 시간은 $V_x\sin\theta_0 = 0$이 되는 지점의 x좌표인 $\frac{V_A\sin\theta_0}{g}$이다. 따라서 시간 $\frac{V_A\sin\theta_0}{g}$동안 움직인 거리가 그래프의 면적과 동일하므로 표1에서 $X = \frac{1}{g}V_A^2\sin\theta_0\cos\theta_0$ 표2에서 $Y = \frac{1}{2g}V_A^2\sin^2\theta_0$

따라서 좌표 (x, y)를 V_A와 θ_0의 함수로 표현하면 $(\frac{1}{g}V_A^2\sin\theta_0\cos\theta_0, \frac{1}{2g}V_A^2\sin^2\theta_0)$이 된다.

(c)

지면에 도달하는 시간은 최고점 도달 시간의 2배인 $\frac{2V_A\sin\theta_0}{g}$이다. 이때 x축으로 이동한 거리는 $\frac{2}{g}V_A^2\sin\theta_0\cos\theta_0$이다. 따라서 $\sin\theta_0\cos\theta_0$이 최대가 되면 x축으로 이동한 거리도 최대가 된다.

$\sin\theta_0\cos\theta_0 = \frac{1}{2}sin2\theta_0$이고 $0 < \theta_0 < \frac{\pi}{2}$이므로 $\theta_0 = \frac{\pi}{4}$일 때 최대가 된다.

<평가>

다시 한 번 답안 작성 시 핵심 내용을 정리하면,

(a) 물체의 x축 및 y축 운동이 등속도 및 등가속도 운동임을 이용하였지만, 시간 t를 소거하지 않고 포물선 운동임을 주장하면 높은 점수를 받을 수 없다. 이 경우에는 매 시간 t에서 각각의 위치를 구해 포물선 운동임을 보이면 되나, t를 소거하면 간단히 보일 수 있다.

(b) 물체 A가 최고점에 도달했을 때 y축 속도가 0으로부터 걸린 시간을 구하지 못하면, 최고점의 좌표 (X,Y)를 구할 수 없게 되어 낮은 점수를 받게 된다.

(c) 물체 A가 충돌하지 않고 가장 멀리 날아가려면, (b)에서 구한 최고점에서의 x축의 좌표 X가 최댓값을 가져야 한다는 생각을 하지 못해 X의 최댓값 조건을 활용하지 못하면 낮은 점수를 받게 된다.

(d) 물체 A와 B가 최고점에서 충돌하려면 물체 B는 수직운동만 하므로 물체 A의 y축 속도와 같아야 하는 데 이를 이해하지 못하면 높은 점수를 받을 수 없다.

(e) 물체 A와 B가 최고점에서 완전비탄성 충돌할 경우 운동량은 보존되지만 에너지는 보존되지 않기 때문에 운동량 보존법칙에 의거하여 해결하면 된다. 많은 수의 학생들이 에너지 보존법칙을 사용하여 충돌 후의 속력을 구했는데 완전 비탄성 충돌에서는 에너지는 보존되지 않는다. 따라서 에너지 보존법칙을 사용한 학생들은 낮은 점수를 받게 되고, 2차원 모멘텀 벡터의 크기를 구하는 방법을 활용해 답안을 작성한 학생들은 높은 점수를 받게 된다.

다) 논제 3 (화학)

1) 출제 의도

원자의 크기, 전기 음성도, 이온화 경향 등의 다양한 원자의 성질은 그 원자가 지니고 있는 전자의 수와 전자 배치에 따라 결정된다. 분자 또한 원자의 새로운 조합에 지나지 않으므로 원자의 성질을 이해하는 것은 분자의 성질과 행동을 이해하는 기본이 된다. 이러한 이유로 고등학교 화학교과서에서는 제시문에 언급된 원자의 성질에 대한 내용을 상세히 다루고 있다. 화학 평형 또한 고등학교 교과과정에서 큰 비중을 두고 교육하고 있다. 본 논술에서는 이러한 기본적인 화학 교과내용을 학생들이 이해하고 있는지와 자신들이 이해하고 있는 내용을 논리적으로 설명할 수 있는지를 알고자 한다.

2) 우수답안의 사례

사례 1

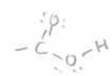
(a) 사이토신의 산소 원자가 황으로 대체된다면 DNA의 이중나선 구조는 더욱 불안정해질 것이다. 수소결합은 한 분자의 H 원자의 부분 양전하와 다른 분자의 N, F, O 원자 사이의 전기적 인력을 통해 형성되는데, S 원자는 산소보다 전기음성도가 작아 충분히 전자쌍을 끌어들이지 못해 구아닌의 H와의 전기적 인력이 작아지게 된다. 따라서 DNA 내의 G-C 수소결합이 더욱 약해져 DNA 구조가 더욱 불안정하게 된다.

(b) 아미노산 분자를 녹이면

$$\begin{array}{c} \text{H} \\ | \\ H_3N^+ - \text{C} - COO^- \\ | \\ \text{H} \end{array}$$

의 구조가 된다.

H_2N-부분은  구조를 갖고, N의 전기음성도가 H보다 크므로 N이 부분음전하를, H가 부분양전하를 띤다. 또

$-COOH$ 부분은  구조를 가지며, O의 전기음성도가 H보다 크므로, O는 부분음전하, H는 부분양전하를 띤다. 이때 O와 H가 결합되어 있는 부분에서, O가 전기음성도가 크므로 결합이 끊어지고 $-COO^-$음이온이 되어 안정해지는 반응이 쉽게 일어나고, H^+ 이온이 생성된다. 또 NH_2- 부분이 N 음전하를 띠므로 H^+를 끌어들여

$$\left[\begin{array}{c} \text{H} \\ / \\ \text{H}-\text{N} \\ | \\ \text{H} \end{array}\right]^+$$

형태로 안정화될 수 있으므로,

$$\begin{array}{c} \text{H} \\ | \\ H_3N^+ - \text{C} - COO^- \\ | \\ \text{H} \end{array}$$

형태가 되고, 극성을 띤 분자가 수용액 속에 증가하므로, 전기전도도가 증가하게 된다.

(c) CO_2 분자는 C=O 극성 공유결합을 가지고 있으나, 극성 용매인 물에 잘 녹지 않고 분자만 인력이 작아 상온, 상압에서 기체로 존재한다. 따라서 CO_2는 무극성 분자이며, 구조적으로 극성이 상쇄되기 위해서는 O=C=O 구조를 가져야 한다.

(d) CO_3^{2-} 는  의 구조를 가지며, C와 O 사이의 결합은 극성공유결합이다. 중심음과 탄소에 비공유 전자쌍이 없으므로 평면삼각형 구조이다. 그러나 두 개의 산소가 전자를 하나씩 더 가지고 있으므로 (①, ②번), ①, ② 쪽으로 반대쪽보다 더 많은 전하가 쏠려 있으므로 극성이다.

[주의]: 루이스 구조를 정확히 그려야 함. 구조가 잘 못 그려짐.

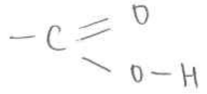
(e) $CO_2(g)+H_2O(l)\rightleftarrows H_2CO_3(aq)$ 이고, $H_2CO_3(g)\rightleftarrows 2H^+(ag)+CO_3^{2-}(ag)$이다. 수용액 속에 H^+ 농도가 높으면 화학 평형의 원리에 의해 주로 역반응이 일어나게 되고, CO_2가 잘 녹지 않게 된다. 반대로 H^+ 농도가 작으면 정반응이 주로 일어나므로, CO_2가 잘 녹게 된다. 따라서 CO_2는 산성 용액보다 염기성 용액에서 더 높은 용해도를 보인다.

사례 2

(a) DNA의 이중나선구조는 염기들의 수소결합이 많을수록 그 구조를 안정적으로 유지하고 있다. 이때 수소결합은 전기음성도가 강한 F, O, N과 다른 분자에서 F, O, N과 공유결합을 하고 있는 H 간에 작용하는 힘이다. 따라서 사이토신의 구조에서 수소결합에 이용되던 O 하나가 S로 대체된다면 그 자리는 더 이상 수소결합이 이루어지지 못하게 된다. 결론적으로 G와 C 사이의 수소결합이 3개에서 2개로 줄어들기 때문에 만약 사이토신에서 O 하나가 S로 대체된다면 DNA의 이중나선구조는 이전보다 불안정해질 것이다..

(b) 아미노산을 증류수에 녹이게 되면 카복실기($-COOH$)의 구조에 변화가 생기고 뒤이어 아만기($-NH_2$)의 구조의 변화가 생겨 전하를 띠게 된다.

우선 $-COOH$부터 확인해보면, $-COOH$의 구조는 다음과 같다.



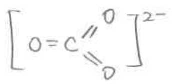
이때 O와 H가 결합한 부분에서 전기음성도가 큰 O 원자는 전자를 강하게 끌어당겨 O^-의 형태가 되려하고 전자를 잃은 H 원자는 H^+가 되어 분리된다. 따라서 $-COOH$는 음전하를 띤다. 즉, $-COOH$는 $-COO^-$가 되고 H^+를 내놓게 된다.
이제 $-NH_2$를 보면, $-NH_2$에서 N 원자는 비공유 전자쌍을 가지고 있으면서 전기음성도가 높아서 H^+와 쉽게 결합할 수 있다. 따라서 $-COOH$가 내놓는 H^+는 $-NH_2$에 결합하게 되는데 그 과정에서 구조는 $-NH_3^+$가 되고 전하는 전자의 개수가 부족하므로 양전하를 띠게 된다.

요약하면

$$\begin{array}{c} H \\ | \\ H_2N - C - COOH \\ | \\ H \end{array} \text{ 였던 아미노산이 증류수에 용해시키면 } \begin{array}{c} H \\ | \\ {}^+H_3N - C - COO^- \\ | \\ H \end{array}$$

가 된다. 전하를 띤 입자가 증가하므로 자연히 수용액의 전기전도도는 증가한다.

(c) 상온, 상압에서 기체 상태라는 것은 상대적으로 분자 간 인력이 작다는 것을 의미하고 같은 조건에서 물에 잘 녹지않는 것은 물과 친화력이 약한 무극성임을 의미한다. 극성공유결합임에도 무극성이려면 그 구조가 대칭을 이루어 쌍극자 모멘트의 합이 0이 됨을 의미한다. 위의 내용으로 예측해보면 CO_2의 구조식은 다음과 같을 것이다.
O=C=O

(d) CO_3^{2-}는 CO_2에서 O 원자와 전자 2개가 추가되어 만들어지는 이온으로써 구조는 다음과 같다. 
이때 전자가 추가되어 결합된 O 쪽으로 자연스럽게 쌍극자 모멘트가 더해지게 되면서 모멘트의 합이 0이 아니게 되고 모멘트 간 균형이 깨진다. 따라서 CO_3^{2-}는 극성을 띤다.

[주의]: 루이스 구조를 정확히 그려야 함. 구조가 잘 못 그려짐.

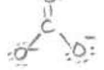
(e) CO_2를 용해시키면 H_2O와 다음과 같은 반응을 한다.
$CO_2 + H_2O \rightarrow CO_3^{2-} + 2H^+$
즉, CO_3^{2-}로 형태가 변하면서 H^+를 내놓게 된다. 이때 용해시킨 용액의 액성이 염기성이었다면 CO_2 용해과정에서 생긴 H^+와 반응, 물을 생성한다. 따라서 용액 전체적인 관점에서 수용할 수 있는 CO_2의 양, 즉 CO_2의 용해도가 증가하게 된다.
만약 염기성이 아닌 산성 용액에 용해시켰다면 이러한 과정이 일어나지 못하게 되므로 상대적으로 낮은 용해도를 나타낸다.
결론적으로 CO_2는 액성이 염기성인 용액에 용해시킬 때 더 높은 용해도를 보이게 된다.

사례 3

(a) DNA 이중나선 구조가 불안정해질 것이다. 사이토신은 구아닌과 3개의 수소결합을 하고 있는데 S(황)가 포함된 구조로 대체되면 O(산소)가 S로 대체되어 수소결합을 2개밖에 하지 못하므로 불안정해진다.

(b) 아미노산이 물에 녹게 되면 H_2N (아미노기)가 염기로 작용하여 수소 이온이 붙게 되어 H_3N^+의 형태로 존재하고, $COOH$(카복시기)가 산으로 작용하여 수소 이온이 떨어져 COO^-의 형태로 존재해 전하를 띠기 때문에 전기 전도도가 증가한다.
아미노산 분자 내에서 산소 원자가 있는 카복시기는 극성이 커서 전자를 잡아당기는 힘이 강해 (−) 전하를 띠고, 이에 반해 질소는 전자를 잡아당기는 힘(전기음성도)이 약해 (+) 전하를 띠게 된다.

(c) CO_2는 물에 녹지 않으므로 무극성이다. 따라서, 원자들이 대칭적인 구조를 이루고 있을 것인데 원자가 3개이므로 탄소가 중심에 있고 양 옆에 산소원자가 각각 결합된 직선형 구조일 것이다.

(d) CO_3^{2-}의 화학 구조는  와 같은 구조이고, 산소 원자 2개가 음전하를 띠고 있다. 따라서, CO_3^{2-}의 구조에서 쌍극자

모멘트의 합이 0이 아니므로 극성 분자이다.

(e) CO_2는 물에 녹으면 탄산(H_2CO_3)의 형태로 바뀌게 되어 산성을 나타낸다. 그러므로 염기성 용액에 녹이는 경우를 살펴보면, 생성되는 H^+와 염기성 분자들 (OH^- 등)이 만나 중화되기 편한 환경이기 때문에 잘 녹는다. 하지만, 산성 용액에 녹이면 이미 H^+가 충분히 존재하는 상황에서 CO_2가 녹으면서 새로 H^+가 발생하기 때문에 잘 녹지 않는다. 따라서, CO_2는 염기성 용액에서 더 높은 용해도를 보인다.

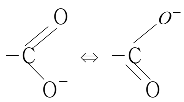
사례 4

(a) 불안정해질 것이다.

DNA 이중 나선구조는 제시문 (마)와 문제에서 말했듯이 단일구조에 존재하는 염기 간의 수소결합에 의해 형성된다. 그런데 수소결합은 크기가 충분히 작고 전기음성도가 매우 큰 N, F, O 원자의 부분 음전하와 다른 분자의 H 원자의 부분 양전하 간의 전기적 인력에 기인한다. 따라서 사이토신의 구조 내의 O가 S로 대체된다면 S가 부분 음전하를 띠면서 구아닌의 H와 쌍극자간 인력이 생길 것은 맞으나 O 보다 전기음성도가 작은 S는 H와 수소결합을 이루지 못하므로 사이토신과 구아닌 간의 인력의 크기가 줄어들 것이다. 따라서 DNA 이중나선 구조는 그 전보다 불안정해질 것이다.

(b) $-NH_2$의 N은 전기 음성도가 크기 때문에 H^+ 양이온과 쉽게 결합할 수 있다. 따라서 $-NH_2$는 수용액에서 염기성을 띠며 $-N^+H_3$의 형태로 존재하기 쉽다.

$-COOH$의 O 원자 역시 전기 음성도가 커 전자를 강하게 끌어당기므로 안정한 $-COO^-$의 형태로 존재할 수 있다.

또한 $-COO^-$는  와 같이 공명구조를 띠기 때문에 음전하가 분산되고 더욱 안정하다.

따라서 H^+양이온이 쉽게 생성되므로 $-COOH$는 수용액에서 산성을 띠며 $-COO^-$ 의 형태로 존재하기 쉽다.

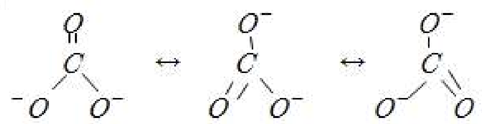
그러므로 $-NH_2$와 $-COOH$를 동시에 가지는 분자인 아미노산은 수용액에서

$H_3^+N - \underset{H}{\overset{H}{C}} - COO^-$ 로 구조가 변화하며 같이 생성될 수 있는 $H_3^+N - \underset{H}{\overset{H}{C}} - COOH$,

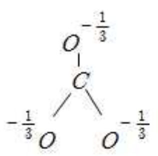
$H_2N - \underset{H}{\overset{H}{C}} - COO^-$, H^+와 같은 이온들에 의해 전기전도도가 증가하는 것이다.

(c) CO_2는 물에 잘 녹지 않는다는 점에서 무극성 분자임을 예측할 수 있고, 무극성 분자는 분자량이 매우 큰 분자가 아닌 이상 분자 간 인력이 그 세기가 약한 분산력 밖에 존재하지 않아 분자간 인력이 약하다는 것으로 CO_2가 상온, 상압에서 기체로 존재한다는 것을 설명할 수 있다. 그런데 CO_2는 한 종류의 원소로 이루어진 분자가 아니고 전기 음성도가 다른 두 원소로 이루어진 분자이기 때문에 극성 결합이 존재할 수밖에 없다. 따라서 CO_2는 3개의 원자 간의 두 결합으로 극성으로 생긴 쌍극자 모멘트가 서로 상쇄되는 대칭적 구조를 가지고 있어야 무극성 분자일 수 있다. 이를 통해 CO_2는 $\vdots O = C = O \vdots$ 의 구조임을 예측할 수 있다.

(d) CO_3^{2-}에 존재하는 C-O 결합은 전기 음성도가 다른 두 원자로 이루어졌기 때문에 극성 결합이다. 하지만 CO_3^{2-}의 화학구조를 그려보면



위와 같이 공명구조를 띰을 알 수 있다. 즉



이와 같이 정삼각형 구조를 가지고 음전하는 3개의 O에 골고루 분산되기 때문에 CO_3^{2-} 이온의 3개의 C-O 결하의 극성으로 생기는 쌍극자 모멘트는 서로 상쇄되어 전체적으로 이 물질은 무극성을 띤다.

(e) CO_2는 물에 녹아들면 $CO_2 + H_2O \rightarrow H_2CO_3$의 반응을 통해 탄산의 형태로 주로 존재하게 된다. 그런데 산성 용액과 달리 염기성 용액에서는 $H_2CO_3 + OH^- \rightarrow H_2O + HCO_3^-$, $HCO_3^- + OH^- \rightarrow H_2O + CO_3^{2-}$의 중화반응이 잘 일어나므로 안정된 탄산 이온의 형태로 존재하기가 쉬우며, H_2CO_3의 농도가 줄면서 $H_2O + CO_2 \rightarrow H_2CO_3$의 반응을 촉진한다. 따라서 CO_2는 산성 용액보다 염기성 용액에서 더 높은 용해도를 보인다.

사례 5

(a) 전기음성도가 큰 F, O, N과 같은 원소들과 결합되어 있는 수소는 다른 분자에 있는 전기음성도가 큰 원소들(F, O, N)과 수소결합을 이룬다. 따라서 원래의 구아닌과 사이토신은
$O \cdots H-N$, $N-H \cdots N$, $N-H \cdots O$ 와 같이 3개의 수소결합을 이루고 있는데, 사이토신의 O가 S로 바뀐다면 N-H와 S 사이에서는 수소결합이 일어나지 않으므로 $O \cdots H-N$, $N-H \cdots N$ 과 같이 2개의 수소결합만 일어나게 된다. 수소결합은 분자 간의 인력 중에서는 큰 힘으로, 끊어지게 되면 분자 간의 인력이 약해지게 된다. 따라서 사이토신을 이루는 산소가 황으로 바뀐다면 DNA 구조는 불안정해질 것이다.

(b) 아미노산을 구성하는 카복시기($-COOH$)에서 H원자와 결합한 O는 전기음성도가 크므로 전자를 강하게 끌어들여 안정한 ($-COO^-$) 로 존재할 수 있어 카복시기는 H^+를 내놓는다. 또한 아미노기 ($-H_2N$) 에는 N의 비공유 전자쌍이 1쌍 존재해 루이스 염기로 작용하게 된다. (N의 전기음성도가 높아 H^+ 양이온과 쉽게 결합을 할 수 있다) 따라서 카복시기는 H^+를 내놓아 ($-COO^-$)가 되고, 아미노기는 ($-NH_3^+$) 가 되므로 아미노산의 구조가

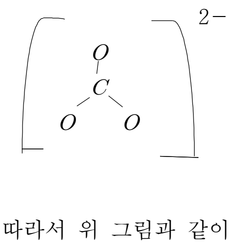
$$\begin{array}{c} H \\ | \\ H_3^+N - C - COO^- \\ | \\ H \end{array}$$

가 되어

아미노산을 증류수에 녹인 수용액의 전기전도도가 순수한 증류수의 전기전도도에 비해 증가하게 된다.

(c) 이산화탄소는 극성용매인 물에 잘 녹지 않는 것으로 보아 무극성분자라고 할 수 있다. CO_2는 홑원소 물질이 아니므로 원자 사이에 적어도 하나의 극성공유결합이 생기게 된다. 극성공유결합이 생기면 한 원자(O)는 다른 원자(C)와의 전기음성도가 다르므로 (O가 C보다 크다) 부분전하가 생기게 된다. 따라서 이 부분 전하들을 상쇄시켜야 무극성분자가 되므로 원자구조가 직선형 또는 평면 삼각형 또는 정사면체가 되어야 한다. 그런데, CO_2 는 3원자 분자이므로 평면삼각형 또는 정사면체가 될 수 없다. 따라서 CO_2는 직선형 분자일 것이다.

(d) CO_3^{2-}는 탄소와 산소만으로 이루어져 있으나 전하를 띠고 있어 극성 용매인 물에 매우 잘 녹는다. CO_3^{2-}는 결합선이 $\frac{32-24}{2} = 4$ 개 이며, O 보다는 C가 결합을 많이 형성하므로 C가 중심원자가 된다. 또한 중심원자를 제외한 나머지 원자의 종류가 같음에도 결합선수가 각각 (1개, 1개, 2개)가 되므로 부분전하가 생기므로 분자가 안정하지 않게 된다. 따라서 CO_3^{2-}는 공명구조를 가진다.



따라서 위 그림과 같이 CO_3^{2-}는 평면삼각형구조를 가져 무극성 분자가 된다.

[주의]: 루이스 구조를 그려야 함.

(e) CO_2는 물에 녹아 약산인 H_2CO_3(탄산)을 형성하므로 염기성 용액과 반응하면 내놓은 H^+가 염기성 용액의 OH^-와 만나 H_2O가 되므로 약산임에도 OH^-와 모두 반응할 때까지 H^+를 내놓게 된다. 반면, 산성 용액에서는 일부(약간)만 이온화가 되고 만다. 따라서 CO_2는 염기성 용액에서 더 높은 용해도를 보일 것이다.

사례 6

(a) 사이토신의 수소결합을 하는 O 원자가 5원자로 대체된다고 하자. 제시문 (나)에 따라 일반적으로 같은 족의 원소일 경우 주기율표의 아래로 내려갈수록 전기음성도가 낮아진다. 제시문 (가)에서 O와 S는 같은 족의 원소이고 S가 O보다 주기율표상 아래에 있음을 알 수 있다. 따라서 O보다 S의 전기음성도가 상대적으로 낮다. 제시문 (마)에서 수소결합은 전기음성도가 큰 N, F, O의 원소들만 가능하므로 S로 대체된 사이토신은 O가 하던 수소 결합을 할 수 없게 되어, 3개의 수소결합을 하던 것이 2개로 줄어 결과적으로 DNA 이중나선 구조가 불안정하게 된다.

(b) 아미노산이 증류수에 들어가게 되면,

(i) 반응하지 않아

```
          H
          |
  H2N  -  C  - COOH
          |
          H
```

(ii) H_2O 한 분자와 반응해

```
          H
          |
  H3N+ -  C  -  COOH + OH-
          |
          H
```

(iii) H_2O 한 분자와 반응해

```
          H
          |
  H2N  -  C  -  COO- + H2O+
          |
          H
```

(iv) H_2O 두 분자와 반응해

```
          H
          |
  H3N+ -  C  -  COO- + (OH- + H3O+)
          |
          H
```

의 경우가 생긴다. (이때, 반응하는 두 분자 사이에서 전기음성도가 더 큰 쪽이 수소 원자를 주는 브린스테드-로우리 산의 역할을, 전기음성도나 더 작은 쪽이 수소원자를 받는 브린스테드-로우리 염기의 역할을 한다.)

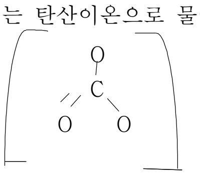
각 경우에서 생긴 이온들이 전하를 옮기는 역할을 하여 증류수보다 전기 전도도가 증가하게 된다.

(c) 물은 O(H H) 의 굽은형으로 극성분자이다. CO_2는 극성 용매인 H_2O 에 잘 녹지 않으므로 무극성 기체임을 유추할 수 있다. C 원자와 O 원자 중 O 원자의 전기음성도가 더 크므로 C와 O의 결합은 극성 공유결합이다.

옥텟 규칙을 만족하고, CO_2가 무극성 분자가 되는 방법은 C와 O의 결합 2개를 대칭적으로 배열해 쌍극자 모멘트의 합을 0으로 만드는 것이다.

$\therefore$ CO_2의 분자 모양은 $:O=C=O:$

(d) CO_3^{2-}는 탄산이온으로 물에 잘 녹는다. C 원자 1개와 O 원자 3개를 최대한 옥텟규칙을 맞춰 배열하면



2- 의 구조가 된다.

그림에는 2중결합 1개와 단일 결합 2개로 보이나, 어느 원자가 2중 결합인지 모르는 공명구조를 이루고 있어, 모든 결합이 $\frac{4}{3}$ 결합인 것으로 인정한다. 각 결합이 이루는 각이 120° 로 모두 대칭적이어서 쌍극자 모멘트의 합이 0이나, 물 속에서 이온의 형

태로 존재한다. 물질 자체는 무극성이다.

(e) CO_2는 물에 용해되면은 부분적으로 H_2O와 결합하여 $H_2O+CO_2 \rightarrow H_2CO_3$,즉 탄산이 된다. H_2CO_3는 H^+ 2개에 CO_3^{2-} 1개가 결합한 모양이며, 증류수에 용해되었을 때 이온화하여 H^+를 내놓아 산성을 띈다. 이를 산성 용액에 적용시킬 경우, 공통이온 효과에 의해 (∵K는 온도가 일정할 때 일정) H^+를 잘 만들지 않게 되어 결과적으로 CO_2의 용해도가 중성 용액보다 줄게 된다. 염기성 용액에서는 H^+가 나오면 중화반응을 일으켜 다시 그 수가 감소하므로, (∵K가 일정) 더 많이 H^+를 낼 수 있는 조건이 되어 결과적으로 CO_2의 용해도가 중성 용액보다 높아진다. ∴ 염기성 용액에서 더 높은 용해도를 보일 것이다.

<평가>

(a) S 는 O 에 비하여 전기음성도가 작아서 S 원자는 수소결합을 하지 않는다. 따라서 O 원자가 S 원자로 치환된 사이토신을 포함하는 DNA 이중 나선구조는 원래의 구조에 비해 단일구조간의 결합이 현저히 약해질 것으로 기대되고 따라서 더욱 불안정해 질 것이다.

(b) 전기 전도도는 수용액내에 이온의 유무와 밀접한 관계가 있으므로 전기전도도가 증가하였다는 사실로부터 이온이 생성되었다는 것을 알 수 있다. 주어진 아미노산 구조에서 $-NH_2$ 가 $-NH_3^+$ 로 $-COOH$ 가 $-COO^-$ 로 변하였음을 추론할 수 있다. COOH 의 경우 $-COO^-$ 로 변하며 H^+를 내어 놓을 수 있는 이유는 O 가 이 분자내에서 전기음성도가 가장 크므로 음전하를 띠는 것을 좋아하기 때문이다.

(c) CO_2 는 상온 상압에서 기체로 존재하며 극성 분자인 물에 잘 녹지 않는 것으로 보아 무극성 (또는 비극성) 분자라는 것을 알 수 있다. 또한 O–C–O 와 C–O–O 두 가지의 원자 배치를 가질 수 있고 C 와 O 사이에 존재하는 결합은 산소 원자에 부분음전하가 생성될 것이므로 이 분자는 직선형의 O–C–O 의 배치를 가질 것으로 예측된다.

(d) 먼저 CO_3^{2-} 의 루이스 전자 구조를 그리고 세 가지의 루이스 구조가 가능함을 보인다. 이 세 개의 루이스 구조의 평균구조가 CO_3^{2-} 이온의 실제 구조일 것이므로 이 이온이 극성을 띠지 않음을 추론할 수 있다.

(e) 이산화탄소는 물과 다음의 반응을 할 수 있다.

$$CO_2 + H_2O \rightleftarrows H_2CO_3$$

이 반응은 약산인 H_2CO_3 가 생기는 반응이므로 위 화학평형을 오른쪽으로 치우치게 하는 염기성 용액에서 CO_2 가 더욱 많이 용해될 것이다.

3) 부족 답안의 사례

사례 1

(a) 불안정해질 것이다. 본래 사이토신과 구아닌 사이의 강한 수소결합 덕분에 DNA 이중나선구조가 안정했는데, 사이토신 O를 S로 대체하면, 수소결합이 사라지므로 불안정해진다.

[주의]: 전기 음성도 언급 안 했음. 같은 족의 전기 음성도 경향 언급하여야 함.

(b) H_2N^-은 H^+가 결합하여 NH_3 극성분자가 되고, $COOH^-$는 OH^-가 결합하여 CO_2와 H_2O가 형성되어, 극성분자의 수가 증가하기 때문에 전기전도도가 증가한다.

(c) 물은 극성분자인데 CO_2는 물에 잘 녹지 않으므로 무극성 분자일 것이다. 즉 O=C=O의 구조로 존재할 것이다.

(d) 극성분자인 물에 잘 녹는점으로 보아 CO_3^{2-}는 극성분자일 것이다. 즉, O - C - O 의 형태로 두 개의 전자가 남는 극성분자일 것이다.

(위 구조식에서 C 위에 | 로 O가 결합)

(e) CO_2에서 O의 전기음성도가 높으므로 음이온 형태가 되기 쉬워, H^+와 쉽게 결합할 수 있다. ($O^- + 2H^+ \rightarrow H_2O$) 즉 산성용액에서 더 높은 용해도를 보일 것이다.

사례 2

(a) 불안정해질 것이라고 예측합니다. 기존의 사이토신은 수소결합을 통해 구아닌과 연결되어 있지만, 문제에서의 사이토신은 S가 있어 수소결합을 형성하지 못하게 됩니다. 따라서 기존의 사이토신보다 쉽게 결합이 끊어져 상온에서는 불안정할 것 같습니다.

(b) (없음)

(c) CO_2는 양쪽의 산소들이 서로 같은 힘으로 당겨, 규칙적인 선 모양 구조를 할 것 같습니다.

(d) O
||
O=C=O 구조로 물에 잘 녹는 극성을 띱니다.

(e) CO_2는 전자친화도가 높은 산소를 가지고 있어 H^+ 양이온과 쉽게 결합할 수 있으므로 수용식 상태에서 H^+를 내놓은 산성 용액에서 더 높은 용해도를 보일 것으로 예측합니다.

사례 3

(a) 불안정해질 것이다.
현재 바뀐 것은 산소원자를 황 원자로 바꾼 것이다. 제시문 (마)를 보면 '수소결합은 분자 간의 아주 강한 상호작용으로서 한 분자에 존재하는 H 원자의 부분양전하와 다른 분자에 존재하는 N, F, O 원자의 부분음전하 사이의 전기적 인력에 기인한다'라고 되어있다.
원래의 사이토신에서 산소원자를 황 원자로 바꿈으로 인해 분자 간의 아주 강한 상호작용인 수소결합이 사라지므로 DNA 이중나선 구조가 더 불안정해질 것이다.

(b) 우선 물은 H_2O 분자로 이루어져 있다. 이 아미노산을 증류수에 녹이게 되면 $COOH^+$와 NH_2O가 물의 H^+, OH^- 와 반응하여 전기 전도도가 생기게 된다. 아미노산은 또한 전기 음성도 차이로 인해 극성결합을 하는 분자이다.

(c) 제시문 (라)에서 보면 물은 H-O 결합에서 보아 산소 원자는 부분음전하, 수소 원자는 부분양전하를 가지는 극성결합 분자이다. 문제에서 '이산화탄소는 상온, 상압에서 기체로 존재하며 같은 조건에서 물에 잘 녹지 않는다'라고 되어있다. 극성 결합을 가진 분자는 비극성 결합을 가진 분자와 잘 섞이지 않는 것으로 보아 이산화탄소, CO_2는 비극성 결합 구조일 것이다.

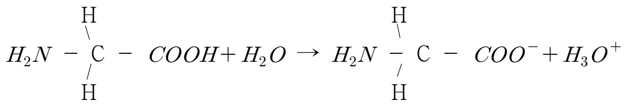
(d) 이산화탄소에서 산소가 한 개 추가되었는데, 그 결합 구조가 산소원자들의 비공유 전자쌍으로 인해 평면 삼각형 구조가 아닌 극성을 띠는 구조가 된다.

(e) 산성 용액에서 더 높은 용해도를 보일 것이다. CO_2가 CO_3^{2-}가 되면 H^+ 분자를 필요로 할 것이기 때문이다.

사례 4

(a) 사이토신에 존재하는 산소는 수소와 수소결합을 하기 때문에 구아닌과 사이토신 사이의 결합이 강하고 안정하다. 만약 사이토신에 존재하는 산소 대신 황이 존재한다면 DNA 이중나선구조가 불안정해질 것이다.
수소결합은 다른 분자에 존재하는 N, F, O 원자의 부분음전하와 H 원자의 부분양전하 사이의 전기적 인력에 기인하므로 황과 수소는 수소결합을 하지 못한다. 그러므로 구아닌과 사이토신의 결합이 약해져서 DNA 이중나선구조가 불안정해질 것이다.

(b) 전기전도도는 용액에서 녹아 있는 이온의 수가 많아질 때 증가한다. 아미노산을 물에 녹이면



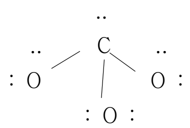
$CH_2NH_2COOH + H_2O \rightarrow CH_2NH_2COO^- + H_3O^+$

이렇게 반응하기 때문에 산과 염기가 생성되어 이온의 수가 증가한다.

전기음성도가 작은 H원자는 전자를 뺏기기 쉽기 때문에 안정한 H^+ 양이온의 형태로 존재할 수 있다.

(c) 극성분자는 극성분자와 잘 섞이고 비극성분자는 비극성분자와 잘 섞인다. 이산화탄소 CO_2는 물에 잘 녹지 않기 때문에 물과 극성이 다르다. 제시문 (라)에 따르면 H-O 결합은 극성을 띠게 된다. 물 H_2O는 H-O 결합이 두 개 있고 굽은형 구조이기 때문에 물 분자는 극성을 띠게 된다. 물과 이산화탄소는 서로 다른 극성이기 때문에 이산화탄소 CO_2는 비극성분자가 된다. 이산화탄소에서 C-O 결합은 탄소원자에 부분양전하가 존재하고 산소원자는 부분음전하가 존재하여 극성을 띠게 되는데 극성 결합이 2개인데 무극성분자이기 때문에 이산화탄소의 구조는 직선형이 된다.

(d) CO_3^{2-}를 루이스 점자점식으로 나타내면


이다.

중심원자 C에서 공유결합한 전자쌍이 3쌍이고 비공유 전자쌍이 1쌍이기 때문에 CO_3^{2-}는 삼각뿔형 구조를 갖는다. CO_3^{2-}는 극성을 띤다.

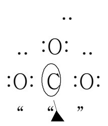
(e) (공백)

사례 5

(a) 불안정해질 것이다.
전기음성도가 높은 O가 S로 대체되어 수소결합이 형성되지 않기 때문이다.

(b) N - C - COO^-
H^+가 전부 빠져나가 COO^-가 −극을 띠므로 전기전도도가 높아진다.

(c) 물에 잘 녹지 않으므로 무극성분자이고, 상온, 상압에서 기체로 존재하므로 공유결합을 한다. $O=C=O$

(d)

탄소가 산소들과 배위결합하고 있는구조;
비공유 전자쌍이 1쌍이 있어 극성분자이고,
따라서 물에 녹는다.

비공유전자쌍 (2−)

(e) 전기음성도가 높은 산소원자가 있으므로, H^+와 잘 반응하여, 산성용액에 더 잘 녹을 것이다.

<평가>

(a) 전기음성도와 수소결합의 관계를 기술하지 않았다.

(b) 전기 전도도와 수용액 내에 이온의 유무와 밀접한 관계가 있다는 사실을 인지하지 못한다.

아미노산 구조에서 $-NH_2$ 가 $-NH_3^+$ 로 $-COOH$ 가 $-COO^-$ 로 변하였음을 추론하지 못한다.

(c) 이산화탄소의 구조는 고등학교 교과과정에서 이미 다루고 있다. 자신이 아는 내용을 논리적으로 전개하기를 기대하며 출제한 문제이다. 그러므로 모범답안과 같이 논리적으로 전개하지 못하는 경우 좋은 점수를 기대할 수 없다.

(d) CO_3^{2-} 의 루이스 전자 구조를 그리지 못한다. 이 루이스 구조를 그리지 못하는 경우 논리의 전개를 할 수 없다.

(e) 화학평형의 이동에 대하여 이해하지 못하는 경우 논리 전개가 불가능하다.

라) 논제 4 (생명과학)

1) 출제 의도

생명의 기본단위인 세포의 분열은 생명의 연속성을 위해 필수적인 과정으로 생명과학을 이해하는 기본적인 지식이다. 제시문과 문제를 통해, 체세포와 생식세포의 세포분열과정에서 핵상의 변화가 각각 어떻게 일어나는지에 대한 이해를 측정하고자 하였으며 또 두 과정이 보여주는 핵상 및 DNA 양의 변화가 서로 일치하지 않는 점을 세포분열 후의 딸세포들의 운명과 연관 지어 설명할 수 있는지를 측정하고자 하였다.
또한, 문제 (e)-(h)는 제시문 (다)-(마)의 내용을 바탕으로, 시각(색맹)이라는 일관된 주제 하에서 유전현상과 감각의 전달, 그리고 진화의 이해를 바탕으로 한 집단 유전학 등의 다양한 분야를 통합할 수 있는 능력을 측정하고자 하였다.

2) 논제 해설 및 평가

제시문 (가)는 고등학교 생명과학1 "세포와 생명의 연속성" 단원의 "세포분열" 섹션에 잘 설명되어 있는 개념으로 체세포분열과 생식세포분열(감수분열)의 차이점을 설명하고 있다. 제시문 (나)는 체세포분열과 생식세포분열 과정 중의 시점들을 모식도로 보여주고 있다. 학생들은 교과서나 참고서에서 세포분열과정 중 특정 시점의 사진 및 모식도를 접했을 것이며 교과서에서도 관련 그림 및 사진들은 제시문 (나)와 같이 분열기 중기에 염색체들이 적도판에 배열된 상태를 주로 보여주고 있으므로 출제에 사용한 소재들에 대해서는 매우 친숙할 것으로 판단된다. 제시문 (다)는 "세포와 생명의 연속성" 단원의 "사람의 유전" 부분에서 소개하고 있는 반성유전의 예인 색맹의 가계도를 제시하였고, 제시문 (라)는 생명과학1 " 항상성과 건강" 단원의 "자극의 전달"에서 소개되는 뉴런의 활동전위 생성에 관한 기초적 내용을 담고 있으며, 제시문 (마)는 고등학교 생명과학2 "생물의 진화" 단원 가운데 "진화의 원리" 부분에서 소개되는 하디-바인베르크 평형에 관한 내용을 담고 있다. 제시문의 내용은 대부분 교과서를 바탕으로 평이한 수준의 내용과 문장으로 이루어져 있다.

3) 예시 답안 및 평가

우수답안의 사례1
(a) 세포1의 경우, 감수 2분열이 일어나는 중이므로 n. 세포2의 경우, 감수 분열이 일어나는 중이므로 2n. 세포3의 경우, 체세포 분열이 일어나는 중이므로 2n. 세포4는 핵막과 인이 보이는 간기이므로 2n.

(b)
DNA의 양은 염색분체 수에 의하여 판단, 세포1의 DNA양이 최소이므로, 세포1의 DNA상대량 1, 세포2는 2, 세포 3은 2, 세포 4는 2이다.(세포4의 경우 간기의 S기를 지나지 아니하였으므로)

(C)
세포1의 경우 감수2분열이 일어나는 중이므로 n의 딸세포형성. 세포2의 경우 감수1분열이 일어나는 중이므로 n의 딸세포 형성되고, 세포3의 경우 체세포 분열이 일어나는 중이므로 2n의 딸세포가 형성된다.

(d)
세포1의 딸세포는 생식세포이므로 DNA의 양이 최소 1이고, 세포2의 딸세포는2, 세포3의 딸세포는 2이다.

(e)
가능한 유전자의 조합은

	(X Y)	(X' Y)		(X X)	(X X')	(X' X')
	↓	↓		↓	↓	↓
남자 :	색맹X	색맹O	여자 :	색맹X	색맹X	색맹O

이므로 만일, 여자가 색맹이 되려면, 부모에게서 모두 X'을 받아야 하나, 남자가 색맹이 되려면 모계에서 X'을 하나만 받으면 되므로 남자에게서 더 많은 비율로 발견된다.

(f)
7은 1에게서 X'을 받아 X'X인 보인자이며 3은 X'Y(색맹) 4는 9에게 X'을 준 보인자(X' X)이다.

i)즉, 8이 색맹일 경우 4에게서 X'받아야 하므로 그 확률은 $\frac{1}{2}$

ii)색맹이 아닐 경우 4에게서 X를 받아야 하므로 그 확률은 $\frac{1}{2}$

8 7
i) (X' Y) (X X') -> X' X' $\frac{1}{4}$
ii) (X Y) (X X') -> X X' 0 이므로
조건부확률으로 $\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\times 0=\frac{1}{8}$ $\frac{1}{8}$이다.

(g)
빛에 의하여 망막신경절세포는 흥분되며, 이 자극에 의하여 세포막의 일부 Na^+ 통로가 열린다. Na^+통로가 열리기 전에는 세포막의 $Na^+ + K^+$펌프가 ATP를 소모하며 능동수송으로 Na^+ 3분자를 유출시키고 K^+ 2분자를 유입시켜 막전위를 분극 상태로 유지하고 있다. 만일 Na^+통로가 열려서 자극이 일정수준(역치)이상 올라간다면, 전압 의존성 통로인 Na^+통로들 중 다수가 열려서 Na^+ 유입이 가속화 되는 탈분극 현상이 일어난다. 이는 능동수송으로 Na^+의 농도차에 의한 확산이다. 또한 활동전위에 도달 후에, K^+가 유출되며(K^+통로를 통하여 수동수송-농도차에 의한 확산) 과분극되었다가 다시 재분극 상태로 돌아간다.

(h)12는 적록 색맹이 아님 -> XY이다.

12		배우자	
XY	i)	XX	(0.8 * 0.8) = 0.64
	ii)	X'X	(0.2 * 0.8*${}_2C_1$) = 0.32
	iii)	X'X'	(0.2 * 0.2) = 0.04

i)이 적록색맹보인자 딸 태어나기가 불가능
ii)딸중 $\frac{1}{2}$이 적록색맹 보인자
iii)딸중 전부 (1)이 적록색맹보인자
곧, $0.64*0+0.32+\frac{1}{2}+0.04*1$
$=0.16+0.04=0.2$

우수 답안의 사례 2

(a)
세포1은 한 염색체에 대한 상동염색체가 존재하지 않으므로, 제시문(가)에 따라서 서로 다른 종류의 염색체가 1조 밖에 없으므로 핵상은 n이다.
세포2와 3은 한 염색체에 대하여 모양과 크기가 같은 상동염색체가 1개가 있어, 서로 다른 종류의 염색체가 2조로 존재하므로 핵상은 2n이다.
세포4는 간기의 세포로, 세포분열 상태가 아니므로 (나)에서 2n=4로 제시된 것에 따라 핵상은 2n이다.

(b)
세포1의 DNA양을 1이라고 하자. 세포1은 감수 2분열 중기의 상태로, 일반적인 G1기의 DNA양이 S기때 복제되어 2개가 되었다가 감수1분열을 거치며 $\frac{1}{2}$배가 되었으므로, G1기 상태의 DNA양이 1임을 알수 있다. 이를 기준으로 하여, 세포2는 2가 염색체가 있는 것을 보아 감수 1분열 중기 이므로, G1기의 DNA양이 S기에 2배가 되어 아직 분열되지 않았으므로 DNA양이 2이다. 세포3은 체세포 분열 중기로, G1기의 DNA양이 S기에 복제가 되어 2배가 되었고, 아직 분열이 이루어지지 않았으므로, DNA양은 2이다.
세포4는 세포분열 직후의 G1기의 세포이으로 DNA양은 1이다.

(c)
세포1은 감수2분열 중기의 세포이므로, 염색체 분리시 염색분체가 분리되므로 세포1(n=2)와 염색체수는 같고 DNA양만 반인 딸세포가 생기므로, 이의 핵상은 N이다. 세포 2는 감수 1분열 중기의 세포로, 상동염색체가 분리되므로 세포2(2n=4)의 염색체 수의 절반일 딸세포가 생기는데, 이의 핵상은 N이다. 세포3은 체세포 분열로, 염색분체가 분리되므로 (2n=4)인 세포3의 딸세포의 핵상은 2n이다.

(d)
마찬가지로 세포 1의 DNA 상대량을 1이라고 하면, 세포 1, 2, 3이 분열시 모두 DNA량은 절반씩 각각의 딸세포로 들어간다. 따라서 (b)의 결과에 의하여, 세포1의 딸세포 DNA량은 0.5. 세포2 딸세포의 DNA량은 1. 세포3 딸세포의 DNA량은 1이다.

(e)
적록색맹유전자의 빈도를 g, 이와 대립유전자인 정상유전자의 반도를 p라 하자.(p+g=1. 0<p<1. 0<g<1). 적록색맹은 x염색체에 유전자가 위치하는 반성유전이고, 열성이다. 따라서, 남자에게 적록색맹이 나타날 확률은 적록색맹유전자를 가질 빈도와 같은 g이고, 여자에게 적록색맹이 나타날 확률은 두 개의 x염색체 모두가 적록색맹유전자를 가질 확률인 g^2이다. 1>g이므로, g>g^2이다. 따라서, 남자에게 더 많이 발견된다.

(f)
적록색맹유전자를 가진 x염색체를 x^g, 정상을 x^G라고 하면, 1이 $x^g y$이므로 7은 x^g을 반드시 물려받았고, 정상이므로 $x^G x^g$이다. 9가 $x^g y$인데, x^g은 4로부터 받은 것이므로 4는 $x^G x^g$이다. 8은 3으로부터 y를 받았고, 4로부터 x^G,x^g를 받을 확률이 각각 $\frac{1}{2}$이다.
8이 $x^G y$인 경우, $x^G x^g$와 $x^G y$사이에서 색맹인 딸 $x^g x^g$가 나올 확률은 0이고, 8이 $x^g y$인 경우, $x^g y$와 $x^G x^g$사이에서 $x^g x^g$가 나올 확률은 $\frac{1}{4}$이다. 8이 $x^g y$일 확률이 $\frac{1}{2}$, 이때 $x^g x^g$가 나올 확률이 $\frac{1}{4}$이므로 결과적으로는 $\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{8}$이다.

(g)
세포는 ATP를 사용하여 능동수송을 통해 Na^+와 K^+의 농도 기울기를 유지하여 -70mV의 휴지전위 상태이다. 빛이 감지되면, Na^+통로가 열리며 Na^+이 고농도인 세포밖에서 저농도인 안으로 확산되어 세포안이 상대적으로 (+)가 되는데, 역치 이상일 경우 Na^+통로가 완전히 열려 +40mV까지 탈분극 된다. 이후 Na^+통로가 닫히면서 K^+통로가 열려 고농도인 세포 안에서 저농도인 세포 밖으로 확산(수동수송)이 되어 재분극이 된다. 이후 Na^+-K^+ 펌프가 능동수송으로 Na^+를 밖으로, K^+을 안으로 농도 기울기를 역행하여 이동해 다시 농도기울기를 형성한다.

(h)
(e)에서 설정과 같이 G의 빈도를 p, g의 빈도를 g라 하면, p+g=1이므로 p=0.8 g=0.2이다. 12는 정상남자이므로 $x^g y$이다. 12

의 딸은 무조건 G유전자를 12로부터 받는다.
보인자 이려면, 나머지 대립유전자가 g여야 한다. 임의의 여성이 $x^G x^G$, $x^G x^g$, $x^g x^g$일 확률은 각각 p^2, $2pg$, g^2이고 g를 받는 것은 $x^G x^g$ 로부터 $\frac{1}{2}$의 확률로, $x^g x^g$로부터 1의 확률로 일어날 수 있으므로, 구하고자 하는 확률은 $2pg \times \frac{1}{2} + g^2 = g(p+g) = g$이므로 결국 g, 즉 0.2이다.

우수 답안의 사례 3

(a)
세포1의 경우 부계와 모계에서 물려받은 같은 크기, 같은 모양의 상동염색체가 없으므로 핵상은 n=2이다. 세포2의 경우는 상동염색체가 관찰되므로 2n=4이고 세포3의 경우도 동일하므로 2n=4이다. 세포4의 경우는 분열상태가 아닌 간기이다. 만약 세포4가 체세포분열을 마친 직후라면 2n=4 일 것이고 감수분열을 마친 직후라면 n=2일 것이다.

(b)
세포4가 체세포분열을 마친 직후의 세포일 경우에는 세포1의 DNA양을 1로 하면 세로2, 세포3은 염색체의 수가 2배이므로 2가 될 것이다. 그러나 세포4는 체세포분열의 과정을 거쳤기 때문에 4개의 염색분체만큼의 DNA양인 1이 될 것이다.
세포 4가 감수분열을 마친 직후의 세포라면 세포4는 염색분체 2개를 가짐으로 이의 DNA양을 1로 하면 세포1은 2, 세포2는 4, 세포3도 4가 될 것이다.

(c)
세포1의 경우 딸세포의 핵상은 세포1과 동일한 n=2가 될 것이고 세포2의 경우는 딸세포의 핵상은 세포2의 절반인 n=2일 것이다. 세포3은 체세포분열의 세포이므로 딸세포의 핵상은 동일하게 2n=4가 된다.

(d)
이때, 세포1의 딸세포는 2개의 염색분체를 가짐으로 이의 DNA양을 1로 두면 세포2의 딸세포와 세포3의 딸세포 모두 4개의 염색분체를 가짐으로 2가 된다.

(e)
적록색맹은 x염색체 상에 존재한다. 색맹이 일어나는 것은 이에 관여되는 유전자에 문제가 발생하여 기능을 제대로 하지 못하는 단백질이 만들어지기 때문이다. 여성의 경우에는 x염색체가 2개인데 각 세포마다 무작위적으로 하나의 염색체가 불활성화되고 다른 하나가 발현된다. 이때, 눈에서 제대로 기능을 하는 세포가 만들어질 수 있기 때문에 여성의 경우는 하나의 적록색맹 유전자를 지니고 있더라도 적록색맹이 아니다. 그렇지만 남자의 경우는 x염색체가 하나뿐이므로 눈에서 모든 세포가 제기능을 하지 못해 적록색맹이 된다. 그러므로 남자에게서 적록색맹의 확률이 높다.

(f)
9가 색맹인 것을 보면 4가 색맹유전자 1개를 가진 보인자임을 알 수 있다. 그러므로 8이 색맹일 확률은 $\frac{1}{2}$이 된다. 또한 1이 색맹이므로 7은 보인자이다. 이때, 적록색맹인 딸을 낳으려면 8이 색맹이여야 하고 이때 적록색맹인 딸을 낳는 확률은 $\frac{1}{4}$이므로 $\frac{1}{2} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{8}$이다.

(g)
−70 mV 정도의 막전위는 에너지를 사용하여 수송하는 능동수송을 일으키는 $Na^+ - K^+$ 펌프로 인해 Na^+이 바깥으로 나가고 K^+가 안으로 들어오면 Na^+의 경우 세포막에서 투과성이 낮으므로 들어오지 못하지만 K^+는 수동수송인 leak채널을 이용하여 빠져나감으로 유지되고 있다. 이때 빛수용체의 빛에 의한 구조변화로 자극이 발생하면 Na^+채널이 열려 Na^+가 농도 차에 의해 수동수송으로 조금 들어오다가 역치전위 이상이 되면 전압개폐성 Na^+채널이 열려 빠른 속도로 세포내로 수동수송되고 이로 인해 약 +40mV정도로 탈분극된다.

(h)
12의 경우 남자이지만 적록색맹이 아니다. 딸이 보인자이려면 아내가 보인자이거나 적록색맹이어야 한다. 우선 g의 빈도가

0.2이므로 아내가 적록색맹일 확률은 0.04이고 이때 딸이 보인자일 확률은 1이다. 아내가 보인자일 확률의 경우 $2\times0.2\times0.8$이므로 0.32이고 이때 딸이 보인자일 확률은 0.5이다. 이는 동시에 일어나지 않으므로 $0.04\times1+0.32\times0.5=0.04+0.16=0.2$이다.

부족 답안의 사례 1

(a)
세포 1에서는 DNA복제가 일어나기 전이므로 핵상은 2n=4이다. 세포2에서는 DNA복제가 일어났으므로 2n=8이다. 세포3에서는 세포분열 중기이므로 4n=8이다. 세포4에서는 세포분열직후이므로 n=2이다.

(b)
세포1에서는 체세포 분열에서 복제가 일어났으므로 DNA 상대량이 2이다. 세포2에서는 감수1분열에서 DNA복제가 일어났으므로 상대적인 양은 4이다. 세포 3에서는 감수1분열에서 세포 분열이 일어났으므로 상대적인 양은 2이다. 세포 4에서는 감수1 분열을 거쳐 감수 2분열 직후이므로 상대적인 양은 1이다.

(c)
분열기는 세포1, 세포3이다. 세포1은 체세포 분열 후기이므로 2n=4이다. 세포3은 감수1분열 후기이므로 4n=8이다.

(d)
세포1은 체세포 분열에서 DNA복제가 일어났으므로 상대적인 DNA양은 2이다. 세포2는 감수 1분열에서 DNA복제가 일어났으므로 상대적인 DNA양은 2이다.

(e)
적록색맹의 유전자는 성염색체 x가 관여하는데, 정상인 염색체를 x, 적록색맹의 염색체를 x'라고 설정했을 때, 여자는 xx, xx', x'x'의 염색체를 갖는다. xx'은 보인자이므로 정상이다.
여자는 x'x', 즉 x'의 염색체가 2개 있어야만 색맹이다. 여자가 적록색맹일 확률은 $\frac{1}{3}$이다. 반면에 남자는 xy, x'y의 염색체를 갖는다. x'염색체 1개가 있으므로 적록색맹이다. 남자가 색맹일 확률은 $\frac{1}{2}$이다. 따라서 적록색맹은 남자에게서 많이 일어난다.

(f)
i)8이 색맹인 경우, 유전자형은 x'y이다(x'은 적록색맹유전자, x는 정상유전자라고 가정했을 때) 7의 유전자형은 xx또는 x'x이다.
i)-i. 7의 유전자형이 xx일 경우

	x'	y
x	x'x	xy
x	x'x	xy

왼쪽의 그림과 같이 색맹인 딸을 낳을 확률은 0이다.

i)-ii. 7의 유전자형이 xx'일 경우

	x'	y
x'	x'x'	x'y
x	xx'	xy

왼쪽의 그림과 같이 색맹인 딸을 낳을 확률은 $\frac{1}{4}$이다.

ii)8이 색맹이 아닌 경우 유전자 형은 x'y이다.
7의 유전자형과의 상관없이 색맹인 딸의 확률은 0이다.
i)ii)에서 색맹인 딸일 확률은 $\frac{1}{4}$이다.

(g)
능동수송에 의하여 Na^+은 세포 밖으로 이동하고 K^+은 세포 안으로 들어간다. 수동수송에 의하여 Na^+은 세포안으로 이동하고, K^+은 세포 밖으로 빠져나간다.

(h)
하디-바인베르크 평형상태에 의하여 유전자 G의 빈도는 0.8이다. (다)의 12가 결혼하여 딸을 낳을 확률은 $\frac{1}{2}$. 딸이 적록색맹 보

인자인 확률은 $\frac{1}{2}\times 2\times 0.8\times 0.2$이므로 0.16이다.

부족 답안의 사례 2

(a)
세포1의 핵상은 n, 세포2의 핵상은

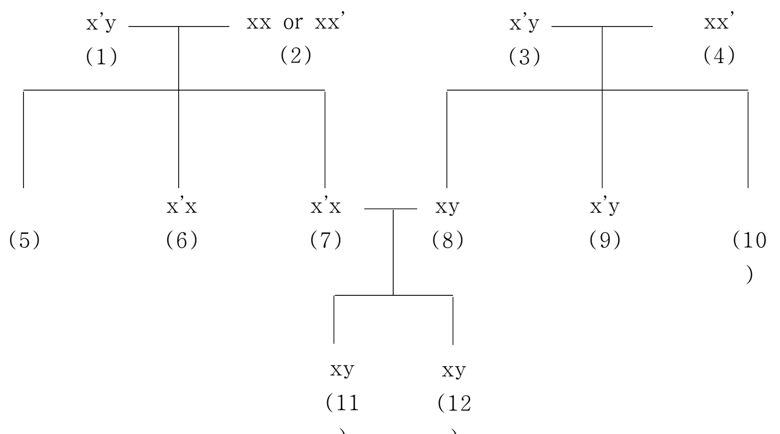
(b)
공백

(c)
공백

(d)
공백

(e)
공백

(f)



적록색맹유전자를 가진 x염색체를 x'이라고 표현한 그림 (다)의 가계도이다. 9는 2에게서 정상 y염색체를 물려받았지만 색맹이므로 4는 보인자이다. 따라서 8이 물려받을 수 있는 두 x염색체 중 하나는 x'이므로 8이 색맹일 확률은 $\frac{1}{2}$이다. 7은 1이 색맹인데, 1에게서 x유전자를 물려받았으므로 x'을 가지지만 정상시각이므로 xx'의 유전자를 가진다는 것을 알 수 있다. 7과 8의 딸은 8에게서 x 또는 x', 7에게서 x또는 x'의 유전자를 각각 $\frac{1}{2}$의 확률로 물려받는데, 양쪽에서 모두 x'을 물려받아야 색맹이 되므로 $\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$의 확률로 색맹이 된다.

(g)
신경세포에서 빛이 없을 때는 나트륨-칼륨 펌프에 의해 Na^{+}는 세포 밖으로, K^{+}은 세포 안으로 수송되고 있으며, K^{+}통로에 의해 K^{+}이 세포 밖으로 수송되고 있는 상태로, 양이온이 세포 밖으로 많이 나가므로 -70mV의 막전위를 유지하고 있다. 빛이 감지되면 빛에 의해 Na^{+}통로가 열리면서 Na^{+}이 세포 안으로 수송되면서 탈분극 되어 (+)전위를 띠게 된다. 망막신경절 세포에서 일어난 이러한 전기적 신호는 대뇌와 연결된 신경세포로 전달되어 대뇌로 정보를 보낸다.

(h)
g의 빈도가 0.2이므로 여성에서의 유전자 G의 빈도는 1−0.2=0.8이다.

부족 답안의 사례 3

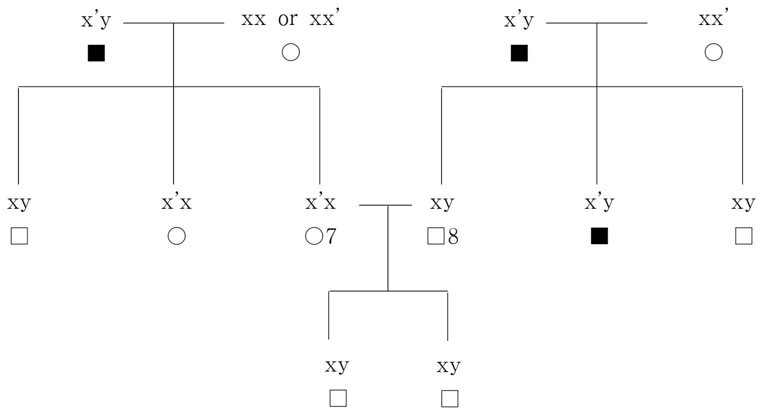
(a)
(나)는 감수분열의 과정을 보여주는 그림이다. 감수분열에서는 각 세포들의 핵상은 2가 염색체의 등장으로 4n이 되었다가 다시 2n으로 돌아온다. 감수 2분열에서 복제를 하지 않고 바로 분열하기 때문에 딸세포의 핵상은 n이 되게 된다.

(b)
각 세포들의 DNA 상대량은 유전자를 복제할 때 2배로 증가하고 1분열에서 나뉘고 2분열은 복제를 하지 않고 그대로 분열을 시작하므로 2분열을 마친 딸세포의 DNA량은 처음의 양의 $\frac{1}{4}$이 되는 것을 알 수 있다. 그러므로 4->8->8->4->4->2->2로 DNA량이 변한다.

(C)
제시문(나)의 분열기 세포는 세포2, 세포3로 볼수 있다.
세포2는 2가 염색체가 보이는 걸로 보아 감수 1분열 중기로 짐작할 수 있는데 이때의 핵상은 4n이다. 세포3은 감수 1분열 후기로 이때의 핵상은 2n이다. 그러므로 이 세포들의 딸세포의 핵상은 반절인 2n, n으로 차이가 있다.

(d)
각 세포들의 DNA 상대량은 감수2분열에서 유전자 복제를 하지 않으므로 1분열은 자신염색체수의 2배에 해당하는 DNA량을 갖지만 2분열부터는 DAN량이 염색체수와 같다.
(e)
적록 색맹은 x염색체 상에 있으므로 xx인 여성보다 성염색체가 xy인 남성에게 더 많이 일어난다.

(f)



먼저 8이 유전자 구성은 2가지로 x'y와 xy이다.
7은 xx'이므로

	x	y
x'	xx'	x'y
x	xx	xy

->색맹일 확률 $\frac{1}{4}$

	x'	y
x'	x'x'	x'y
x	xx'	xy

->색맹 $\frac{1}{2}$

따라서 색맹인 동시에 딸일 확률은 $(\frac{1}{4}\times\frac{1}{2})\times\frac{1}{2}$이므로 $\frac{3}{8}$이다.

(h)
g -> 0.2
g' -> 0.8

(a) 제시문 (가)를 참조하여 제시문 (나)의 각 세포들이 가지는 핵상에는 어떤 차이가 있는지 n값으로 설명하시오.
해답:
세포1 n
세포2 2n
세포3 2n
세포4 2n (혹은, 생식세포인 경우 n)

해설:
세포1은 감수2분열 분열기의 중기로 앞선 감수1분열(감소분열)을 통해 이미 상동염색체의 분리가 일어났으므로(2n →n) 2가염색체(4분염색체)가 존재하지 않고 염색분체들의 결합이 보인다.
세포2는 감수1분열 분열기의 중기로, 상동염색체들이 결합된 2가염색체(4분염색체)를 관찰할 수 있다. 이 시기에는 여전히 양친으로부터 물려받은 상동염색체들을 보유하고 있으므로 2n의 상태가 유지되고 있다.
세포3은 체세포분열 분열기의 중기로 상동염색체들이 2가염색체를 형성하지 않고 나란히 적도판에 배열한다. 체세포는 세포주기 전체를 통해 핵상의 변화가 없이 2n 상태를 유지한다.
세포4는 체세포분열 직후 간기(2n) 혹은 생식세포 감수 2분열 직후(n)에 해당한다.

(b) 문제 (a)의 각 세포들이 가지는 DNA의 상대적인 양에는 어떤 차이가 있는지 설명하시오. (단 DNA 양이 가장 적은 세포의 DNA 양을 1이라고 하시오.)
해답:
세포1의 DNA 양 = 1
세포2의 DNA 양 = 2
세포3의 DNA 양 = 2
세포4의 DNA 양 = 1(체세포인 경우)

세포1의 DNA 양 = 2
세포2의 DNA 양 = 4
세포3의 DNA 양 = 4
세포4의 DNA 양 = 1(생식세포인 경우)

해설:
세포1은 감수2분열 중기의 상태로 감수1분열 중기인 세포2가 분열한 뒤 새로운 DNA 복제 없이 두 번째 세포분열에 들어가는 상태이다. 따라서 세포1의 DNA양은 세포2의 절반이다. 상대량=1
세포2는 감수1분열 중기의 상태로 감수분열에 돌입하기에 앞서 DNA가 복제된 상태이다. 상대량=2
세포3은 체세포분열 중기의 상태로 세포분열에 앞서 DNA가 복제된 상태이다. 상대량=2
세포4는 체세포분열 직후로 세포3에 비해 DNA양이 절반이다. 상대량=1
(세포4가 감수분열 직후인 경우 DNA 양은 세포1의 절반이므로 상대량=0.5가 된다.)

(c) 제시문 (나)의 세포들 중 분열기의 세포들만 골라 그들의 딸세포가 가진 핵상에는 어떤 차이가 있는지 n값으로 설명하시오.
해답:
세포1의 딸세포 n
세포2의 딸세포 n
세포3의 딸세포 2n

해설:
세포1의 감수2분열은 핵상의 변화 없이 염색분체만 나누어지면서 두 개의 딸세포로 분리된다. 세포2의 감수1분열은 감소분열이라고 부르듯이 핵상이 2n에서 n으로 감소한다. 체세포분열의 딸세포는 모세포와 동일하게 2n 상태를 유지한다.

(d) 문제 (c)의 각 세포들이 가지는 DNA의 상대적인 양에는 어떤 차이가 있는지 설명하시오. (단 DNA 양이 가장 적은 세포의 DNA 양을 1이라고 하시오.)
해답:
세포1의 딸세포의 DNA 양 = 1
세포2의 딸세포의 DNA 양 = 2
세포3의 딸세포의 DNA 양 = 2

해설:
분열기의 세포들은 핵막이 소실된 상태로 염색체가 응축되어 있으므로 세포1, 2, 3이 분열기의 세포들이다.
세포1의 감수2분열 과정에서 새로운 DNA 복제 없이 세포분열이 일어나므로 딸세포의 DNA양은 세포2에 비해 절반이다. 상대량=1
세포2의 감수1분열을 위해서는 DNA 복제가 일어난 후 세포분열이 일어나므로 딸세포의 DNA양은 DNA 복제 이전의 모세포와 동일하다. 상대량=2
세포3은 체세포분열과정으로 DNA 복제가 일어난 후 세포분열이 일어나므로 딸세포의 DNA양은 DNA 복제이전의 모세포와 동일하다. 상대량=2

(e) 제시문 (다)의 적록색맹이 남자에게서 더 많은 비율로 발견되는 이유를 설명하시오.

해답 및 해설:
반성유전의 개념을 묻는 문제로, 우성과 열성의 이해를 바탕으로 매우 쉽게 답할 수 있는 문제이다. 색맹 유전형질이 열성임을 기술하고, 성염색체의 차이에 따른(XX vs. XY) 표현형의 차이를 기술하되, 색맹 유발 유전형의 집단 내 빈도를 이용하여 기술하면 높은 점수를 받을 수 있다.
(우수 답안의 예; 적록색맹 유전자의 빈도를 q라 하고 이와 대립 유전자인 정상유전자의 빈도를 p라 하면, $p+q=1$, $0<p<1$, $0<q<1$이다. 적록색맹은 x염색체에 존재하는 반성유전이고 열성이다. 따라서 남자에게서 적록색맹이 일어날 확률은 적록색맹유전자를 가질 확률 q와 같고, 여자에게 적록색맹이 일어날 확률은 두 개의 x 염색체 모두가 적록색맹 유전자를 가질 확률인 q^2이다. $1>q$이므로 $q>q^2$ 이다. 따라서 남자에서의 색맹 빈도가 높다)
(부족 답안의 예: 적록색맹유전자를 가진 X염색체를 X'이라 할 때, 남자는 XY 또는 X'Y 중 X'Y가, 여자는 XX, X'X, X'X' 가운데 X'X'만이 색맹이 되므로, 남자는 1/2의 확률로 색맹이 되고, 여자는 1/3의 확률로 색맹이 되므로 남자에서의 색맹 빈도가 높다.)

(f) 제시문 (다)의 가계도에서 8은 어린 시절 사고로 인하여 시각을 잃어 색맹의 여부를 알 수 없다. 7과 8 부부가 셋째 아이를 낳을 경우 색맹인 딸을 낳을 확률을 설명하시오. (단, 출생 시 남녀 비율은 동일하다.)

해답 및 해설:
가계도를 이용하여 유전자의 분포를 유추하는 문제이다. 가계도를 이용하여 부모의 유전형의 가능성을 유추하고 이를 이용하여 확률을 유추하는 논리를 기술하여야 한다.
(우수 답안의 예; 1이 색맹이므로 X'Y(색맹을 유발하는 유전자를 가진 X 염색체를 X'이라 할 때)의 유전형을 가지고, 7은 정상 형질이지만 1로부터 X 염색체를 받아야 하므로 X'X를 가진 보인자이다. 4는 색맹 아들(X'Y)

인 9를 낳았으므로 X'을 물려준 보인자여야 하고, 따라서 8은 X'을 가질 확률이 1/2이다. 따라서 7-8의 셋째 자녀가 색맹인 딸일 확률은, 7로부터 X'을 받을 확률(1/2) x 8로부터 X'을 받을 확률(1/2 x 1/2) = 1/8이다)
(부족 답안의 예; 8은 색맹의 여부를 모르므로 XY일 수도 있고, X'Y일 수도 있다. 우선 XY인 경우,... 둘 째, X'Y인 경우는...)

(g) 제시문 (라)에 설명되어 있는 망막신경절 세포의 빛에 의한 전도 현상을 세포막의 능동수송과 수동수송의 관점에서 설명하시오.

해답 및 해설:
막전위 형성의 원리와 활동전위의 발생 현상을 이온의 수송관점에서 이해하고 있는지를 묻는 문제이다. 막전위 생성의 원리와 활동전위 생성의 원리를 능동수송/수동수송의 기전으로 설명하되, 능동수송과 수동수송의 원리도 함께 설명하여야 한다.
(우수 답안의 예; 세포막의 세포질 측과 세포외 측 사이의 막전위는 이온의 불균등한 분포 때문에 생기는데, 이는 주로 Na^+이온을 세포 밖으로 퍼냄과 동시에 K^+ 이온을 세포 안으로 퍼들이는 Na^+-K^+펌프의 작용에 의해 일어난다. 이 펌프는 이온의 농도구배를 거슬러 이온을 수송하는 능동수송이므로 ATP를 소비하며 일어난다. 이 결과 휴지막전위 상태에서는 세포내 Na^+이온의 농도는 세포 밖에 비하여 월등히 낮게 유지되고 세포내 K^+이온의 농도는 세포 밖에 비하여 월등히 높게 유지된다. 빛의 자극이 오면 망막신경절 세포는 이에 반응하여 활동 전위를 일으키는데, 세포막에 존재하는 Na^+통로(채널)가 자극에 의해 열리면 세포 밖의 Na^+농도가 높으므로 확산에 의해 이온이 이동하는 수동수송이 일어나, 에너지의 소비 없이 Na^+이온의 세포 내 유입이 일어난다. 이를 통해 탈분극이 일어나면, 다시 K^+통로가 열리게 되어 세포내 높은 농도로 유지되던 K^+이온의 세포 밖으로의 수동수송이 일어나고 이를 통해 재분극이 일어나게 된다.)
(부족 답안의 예; 세포막의 전위는 능동수송에 의해 일어나고 빛에 의한 전도는 수동수송에 의하여 일어난다.
- 이 경우 능동수송과 수동수송의 정의(에너지 사용 여부 등)를 설명하여야 한다.

(h) 제시문 (다)의 가계도가 속한 집단이 제시문 (마)의 멘델집단으로 가정하고, 이 집단의 적록색맹은 유전자 G의 대립유전자 g에 의해 일어나며, 이 집단 내 여성에서의 대립유전자 g의 빈도가 0.2라면 제시문 (다)의 12가 결혼하여 낳은 딸이 적록색맹 보인자일 확률을 계산하시오.

해답 및 해설:
하디-바인베르크 평형의 원리를 이해하고 적용할 수 있는지를 묻는 문제이다.
(우수 답안의 예; 제시문 (다)의 가계도에서 12는 정상남자이므로 정상 X 염색체를 가지고 있고, 따라서 그 자녀의 색맹여부는 배우자에 의해 결정된다. 이 집단이 멘델 집단임을 가정하면, 이 집단 내 여성의 색맹유전형에 따른 빈도는 색맹유전자 g의 빈도(하디-바인베르크 공식에서의 q에 해당)인 0.2에 의해 결정된다. 즉, 정상유전자를 가진 정상여자(XX)의 빈도는 $(1-q)^2$ 이므로 0.64(64%)이고, 보인자 여자(XX')의 빈도는 $2(1-q)q$ 이므로 0.32(32%), 그리고 색맹여자인 X'X'의 빈도는 q^2 인 0.04(4%)이다. 이 때, 딸이 색맹일 확률은 보인자와 결혼할 경우의 확률인 0.32 x 1/2 = 0.16과 색맹인 여자와 결혼한 경우의 확률인 0.04 x 1 = 0.04의 합인 0.2(20%)이다.)
(부족 답안의 예; 대립유전자의 빈도가 0.2이므로 확률은 0.2이다.
- 이 경우 틀린 답안은 아니나, 제시문에서 제시한 하디-바인베르크 평형을 응용한 답안이 아니므로, 감점의 요인이 됨.)

마) 논제 5(지구과학)

1) 출제 의도

지구과학 I에서 다루는 지질, 대기, 해양의 지식을 통합한 문제를 출제하였다. 태양계의 기원, 지구형 행성의 형성과 분화과정, 판구조 활동 등에 대한 전반적 이해는 고등학교 지구과학 교육의 중심 주제를 이루고 있다. 이러한 지구 환경을 구성하는 지질, 대기, 해양에 대한 개별적 이해 및 이들 사이 상호작용에 대한 이해를 기반으로 유추하는 사고 체계를 측정하는 문제들로 구성하였다. 본 논제를 푸는데 필요한 기초 지식은 고등학교 지구과학 I의 1단원 “하나뿐인 지구”와 3단원 “신비한 우주”, 지구과학 II의 1단원 “지구의 구조와 지각의 물질”과 2단원 “지구의 변동과 역사”에서 다루고 있다.

2) 논제 해설

(a) 지구의 평균밀도와 대륙지각의 평균밀도가 다른 이유를 설명하고, 어떠한 과정에 의하여 이러한 밀도 차이가 생겼는지 설명하시오. (총 4점)

- 지구의 평균밀도 = 5.57 g/cm^3 > 대륙지각의 평균밀도 2.7 g/cm^3
  - 따라서 지구의 내부에 더 밀한 물질이 존재한다.
  - 지구의 층상구조에 의하여 내핵, 외핵, 맨틀, 지각으로 구성된다. (2점)
  - 운석과 같은 물질들이 뭉쳐서 만들어진 원시 지구가 가열되어 무거운 물질이 지구 중심부로 가라앉아 층상구조가 형성되었다. (2점)

(b) 달의 평균밀도와 달의 표면에서 아폴로 달 탐사를 통해 수집한 암석의 밀도가 다른 이유를 설명하시오. (총 3점)

- 달의 평균밀도 = 3.35 g/cm^3 > 달 표면 암석의 평균밀도 3 g/cm^3
- 달의 경우도 분화에 의한 층상구조에 의하여 밀도가 더 큰 내부와 상대적으로 밀도가 작은 지각으로 구성되어 밀도차이가 발생한다. (3점)

(c) 만약 달에 지구와 같은 자기장이 존재하지 않는다면 그 이유를 설명하시오. (총 3점)

- 지구의 경우에는 내부의 층상구조 중 외핵부분이 액체상의 철과 니켈로 구성되어 지구의 자전에 의하여 자기장이 형성된다. 달에도 자기장이 존재하며 외핵부분이 일부 용융되어 있는 것으로 알려진 바 있다. 따라서 달에 만약 자기장이 존재하지 않는다면 내부에 층상구조가 발달하지 않은 균질체이거나 또는 분화는 하였지만 액체상의 층이 존재하지 않는 경우이다.

(d) 오늘날 지구에는 화성, 수성, 달에 비하여 운석 충돌 구덩이가 훨씬 적은 수만 분포한다. 그 이유를 모두 설명하시오. (총 6점)

- 지구에는 대기와 액체상의 물이 존재하기 때문에 지표에서 풍화작용이 활발하게 일어나서 과거에 있었던 운석 충돌 구덩이를 지울 수 있다. (2점)
- 현재 지구의 표면은 약 30%만이 육지의 대륙지각이고 나머지 70%는 바다로 구성되어 있어 운석충돌이 바다에 일어날 확률이 더 높다.(2점)
- 그러나 지구에서 가장 오래된 해양지각의 연령은 약 2억 년(동태평양 지역)으로 이보다 오래된 해양지각은 해구에서 섭입되어 지구 내부로 들어가 버렸기 때문에 해양지각에 기록된 운석 충돌의 흔적은 지워지게 된다. (2점)

(e) 운석이 지구에 떨어질 때 그 크기에 따라 불타면서 소멸되기도 하고 지표와 충돌해서 폭발하기도 한다. 그 이유를 설명하시오. (총 3점)

- 대기의 밀도는 지표에서 제일 밀하고 고도 100 km까지 성분은 일정하나 밀도는 지속적으로 감소한다. 매우 빠른 속도로(통상 수십 km/s) 대기권을 통과하여 지표로 떨어지는 운석이 대기와 마찰하는 시간은 매우 짧다. 운석이 대기권을 통과하는 경우 균질권의 하부에만 운석을 대기와의 마찰로 태울 수 있는 정도로 충분히 밀한 대기가 존재하며, 따라서 일정 크기 이상의 운석은 대기와의 마찰에도 불구하고 거의 영향을 받지 않고 지표에 떨어져 운동에너지가 열에너지로 변하여 폭발하게 된다.

3) 예시 답안 및 평가

우수 답안의 사례1

(a) 지구 중심부로 갈수록 무거운 철 성분의 함량이 증가한다. 이는 지구의 생성과정과 관련이 있다. 생성 초기의 지구는 미행성들과의 잦은 충돌로 인해 매우 고온인 상태였고, 암석들이 용융점에 도달해 액체 상태로 존재했다. 그래서 지구의 구성 물질들 중 밀도가 큰 물질은 자연히 지구 중심부로 가라앉고, 밀도가 작은 물질은 지표에 잔류하는 일종의 '분류 작업'이 일어났다. 그래서 지구 중심부로 갈수록 무거운 철이나 니켈과 같은 원소의 함량이 증가하며, 이는 지구의 평균 밀도와 대륙지각의 평균밀도가 다른 원인이 되었다.

(b) 달 또한 지구와 마찬가지로 생성 초기에 매우 고온의 상태였고, 그에 따라 무거운 원소가 달의 중심부에 가라앉았다. 이것이 달의 평균밀도와 달 표면 암석의 밀도가 다른 원인이 되었다.

(c) 지구 중심부에 가라앉은 무거운 원소들 중 일부의 금속 원소가 액체 상태로 존재한다. 이 액체 금속 원소들이 지구 중심부에서 방향성을 가지고 회전하고 있다. 그런데 이 금속은 매우 고온 상태이므로 금속 양이온과 자유전자가 분리되어 있다. 이러한 전하를 띤 입자들이 일정한 방향성을 가지고 회전하는 것은 전류가 흐르는 효과를 내며, 이로 인해 지구에는 자기장이 형성되게 된다. 따라서 자기장이 존재하지 않는 지구형 행성이 있다면 그 이유는
첫째, 생성 당시 금속 성분을 구성 성분으로 가지고 있지 못하거나
둘째, 금속 성분을 충분히 포함했지만, 중심부의 온도가 충분히 높지 못해서, 금속이 용융되어 회전할 수 없는 상태이기 때문일 것이다.

(d) 지구에 운석 충돌 구덩이가 적은 이유는 첫째로, 운석 충돌의 횟수 자체가 적었기 때문일 것이다. 지구에는 두께 약 10km의 대기가 존재한다. 따라서 지구의 중력에 이끌려 지구로 접근하던 암석들도, 대기에 진입함과 동시에 일종의 마찰인 공기 저항으로 인해 불타버려 지표에 암석이 도달하지 못하는 경우가 생긴다. 이에 반해 화성, 수성, 달에는 대기가 없으므로 접근하는 암석들이 지표에 도달하는 빈도가 높아 운석 구덩이의 개수도 상대적으로 많았을 것이다. 둘째로, 지구 내 활동의 결과로 생성된 운석 구덩이가 없어졌을 것이다. 지구에서는 유수, 바람, 생물, 인간의 활동 등으로 인한 풍화와 침식, 또 지진, 융기, 침강과 같은 지각 변동으로 인해 이미 생성된 운석 구덩이라도 소멸되는 경우가 있을 수 있다. 지구와 달리 수성, 달, 화성 등에는 풍화와 침식의 원인들이 없거나 있어도 매우 적으며, 지구는 활발한 맨틀 대류로 지각 변동이 잦은 반면, 이들은 그렇지 못하다. 이는 지구의 운석 구덩이 개수가 적은 원인이 된다.

(e) 운석은 지구에 떨어질 때 지구를 둘러싼 대기와 충돌하면서 마찰로 인해 온도가 올라가 불이 붙게 된다. 이때 운석의 크기와 구성 물질이 지표까지 도달하는데 발생하는 공기 저항을 견뎌낼 수 있느냐 없느냐 하는 중요한 요인이 된다. 크기가 크고 철질 운석일수록 공기저항에 강하다. 운석이 크기가 크면 공기 저항에도 다 불타지 않아 지표에 도달하게 되고, 그렇지 못하면 중간에 모두 불타 소멸한다.

우수 답안의 사례2

(a) 대륙지각에는 밀도가 비교적 작은 화강암질 암석이 많이 분포하지만 지구 내부에는 밀도가 비교적 큰 철과 니켈 등으로 이루어진 물질이 많이 분포한다. 그래서 지구의 평균 밀도는 대륙지각의 평균 밀도보다 크고, 그 이유는 지구의 형성 과정에 있다. 원시 지구에는 수시로 미행성들이 충돌하였고, 그 충돌열에 의하여 지구는 용융 상태로 존재했다. 이때 밀도가 비교적 작은 화강암질, 현무암질 암석은 지표 가까이 떠오르고 밀도가 비교적 큰 철, 니켈 성분은 지구 중심으로 가라앉았다. 그리고 미행성의 충돌이 줄어들자 지표가 점차 식어 원시 지각이 형성되었다. 그런 이유로 지구 중심으로 갈수록 평균밀도가 증가하게 되었다.

(b) 달도 역시 형성 초기에는 용융 상태로 존재하였다. 그 과정에서 밀도가 큰 물질은 가라앉고 밀도가 작은 물질은 떠올라 지표를 구성하는 물질이 되었다. 아폴로 달 탐사를 통해 수집한 암석은 달의 표면을 구성하는 암석인데, 달의 평균 밀도는 표면을 구성하는, 수집한 암석의 밀도보다 클 수밖에 없다.

(c) 지구에 자기장이 존재하는 이유는 지구의 외핵이 액체상태의 철 성분으로 구성되어 있고, 이것이 지구 자전과 함께 회전하면서 유도 전류를 만들기 때문이다. 그리고 이 유도 전류는 주위에 자기장을 만든다. 지구의 외핵이 고체 상태로 존재했다면 지구 자기장은 존재하지 않았을 것이다. 마찬가지로 다른 지구형 행성의 자기장이 존재하지 않는다면 그 행성의 내부에 액체 상태의 철 성분으로 구성된 층상 구조가 존재하지 않기 때문에 자기장이 존재하지 않는 것이다.

(d) 화성이나 수성, 달은 중력이 작아 충분히 두꺼운 대기를 갖지 못한다. 하지만 지구에는 질소와 산소 등으로 이루어진, 어느 정도 두꺼운 대기층이 있다. 운석은 대기를 통과하면서 대기와의 마찰열에 의해 불타버리므로 작은 운석들은 쉽게 지구의 표면까지 도달하지 못한다. 그리고 지구의 대기는 지표에서 각종 풍화작용을 일으킨다. 운석 충돌 구덩이가 생긴다 하더라도 물과 바람의 풍화, 침식 작용을 받아 그 형태가 깎여 나가거나 변한다. 따라서 운석 충돌 구덩이가 오래 보존되기 어렵다. 또한 오랜 세월동안 지각 변동을 받아 운석 구덩이가 땅 속에 묻히거나 사라질 수 있다. 이러한 이유들에 의해서 지구에는 화성, 수성, 달보다 적은 수의 운석 충돌 구덩이가 분포한다.

(e) 운석이 지구 중력에 이끌려 빠른 속도로 지구를 향해 떨어지면 대기와 마찰하면서 높은 마찰열이 발생한다. 높은 온도에 의해 운석이 대기 상에서 불타면서 소멸하거나 크기가 작아진다. 그런데 운석의 크기가 충분히 클 경우 대기권에서 모두 소멸되지 않고 운석의 일부가 남아 지표와 충돌할 수 있다. 그 경우 운석이 엄청난 속도로 지표를 향해 낙하하였기 때문에 충돌 직전 운석의 운동에너지는 아주 크다. 운동 에너지가 클수록 충격량도 증가하므로 운석이 폭발하면서 거대한 운석 구덩이를 만들고 주변의 생명체에 피해를 입히기도 한다.

우수 답안의 사례 3

(a) 대륙지각은 주로 밀도가 작은 화강암질 암석으로 이루어져 있다. 원시 지구 때 수많은 미행성의 충돌로 지구는 마그마의 바다가 되었다. 이 시기에 지구 내부에서는 철, 니켈 성분이 많은 지구 중심으로 모여들고 규산염 광물을 많이 포함한 마그마는 지구 표면 가까이 있었다. 이렇게 핵과 맨틀이 분리되면서 핵은 밀도가 큰 물질들이 많고, 맨틀, 지각 쪽으로 갈수록 점점 밀도가 작아졌다. 그렇기 때문에 대륙지각의 평균밀도가 지구의 평균밀도보다 작다.

(b) 달도 지구처럼 중심부가 밀도 높은 물질로 구성되어 있고, 밀도가 작은 물질이 표면 가까이 분포되어 있을 것이기 때문이다.

(c) 지구의 자기장이 나타나는 원인은 다이나모 이론으로 설명한 액체 상태의 외핵의 운동이다. 자기장이 존재하지 않는 지구형 행성은 지구처럼 액체 상태의 외핵이 존재하지 않기 때문에 자기장이 나타나지 않는다.

(d) 지구에 운석 충돌 구덩이가 적은 이유는 운석이 충돌했어도 대기, 물 등에 의해 풍화, 침식이 되었기 때문이다. 반면에 화성과 같이 대기가 매우 얇고, 물이 거의 없는 환경, 또는 달, 수성 등과 같이 대기가 없는 환경에서는 운석이 충돌해도 그 흔적이 없어지지 않는다.

(e) 운석은 지구의 대기권으로 들어오면 마찰에 의해 불타기 시작한다. 크기가 작은 운석은 지표에 도달하기 전에 대기에서 전부 불타 없어진다. 그런데 직경이 200m보다 큰 석질운석과 직경 40~60m보다 큰 철질 운석은 대기권에서 불타는 도중에 지표와 충돌하여 폭발하게 된다.

부족 답안의 사례1

(a) 지구 생성 초기인 마그마의 바다 때는 지구는 전체적으로 용융상태였다. 그때 지구의 구성원소들 중에서 무거운 철질 원소(철, 니켈)들은 대류에 의해 지구 내부로 이동하게 되었고, 가벼운 석질 원소들(규산염 광물 등)은 지구 표면으로 이동하게 되었다. 그래서 지구의 평균밀도보다 대륙지각의 평균밀도가 더 낮게 측정이 되는 것이다.

(b) 이도 (a)와 비슷한 이유인데, 달도 처음부터 그렇게 고체인 상태로 존재하지는 않았을 것이다. 달이 행성 충돌의 이유로 온도가 점점 상승하면서 달을 이루고 있는 물질들을 녹일 수 있는 온도까지 높아져서 점차 대류에 의해 무거운 물질은 내부로, 가벼운 물질은 표면으로 이동했을 것이다. 그런데 달을 탐사할 때 표면에 있는 암석들을 채취해왔으므로 당연히 채취된 암석의 밀도가 달의 평

균 밀도보다 작을 수밖에 없다.

(c) 지구에 자기장이 존재하는 이유는 핵의 구성원소들이 철과 니켈 같은 유도전류를 잘 일으킬 수 있는 철질 원소로 되있기 때문이다. 그런 원소들은 외부, 즉 우주에서의 자기장에 유도 전류를 일으켜 지구의 자기장을 만든다. 그러므로 자기장이 존재하지 않으려면 그 행성이 이루는 구성성분들 중 철질 성분이 없다면, 그 행성은 자기장을 만들지 못할 것이다.

(d) 화성, 수성, 달의 공통점은 무엇인가? 그건 행성 표면에 기체들이 희박하다는 것이다. 운석들은 어떠한 행성과 충돌을 하려할 때 반드시 그 행성의 대기권을 뚫고 지나가야만 하는데 이 대기권을 통과할 때 운석은 공기에 의한 마찰을 받게 된다. 그런데 지구는 대기권에 있는 기체들의 양이 워낙 많기에 운석이 충돌하기 전에 모두 마찰열에 의해 다 타버린다. 그래서 지구는 운석 충돌 구덩이의 수가 화성과, 수성, 달 같이 기체가 희박한 행성들에 비해 적은 것이다.

(e) 일반적으로 크기가 작은 운석들은 대기권에서 공기에 의한 마찰로 다 타버리기 일쑤다. 하지만 그 크기가 일정 이상으로 커지면 운석이 대기권에서 공기에 의한 마찰로 다 타버리지 않고 지표에 도달하여 충돌하는데 그 이유는 운석이 너무 커서 그 운석을 다 태울만한 시간과 열이 부족했기 때문이다.

부족 답안의 사례 2

(a) 지구는 핵과 맨틀, 지각으로 구분되어 있다. 핵은 대부분이 친철 원소로 구성되어 있고 맨틀은 감람석 그리고 지각은 현무암 또는 화강암으로 구성되어 있다. 지구의 구성비가 깊이에 따라 달라진 이유는 지구 생성초기 마그마의 바다 당시 무거운 원소인 철은 가라앉아 핵을 형성하고, 상대적으로 가벼운 감람석, 현무암, 화강암 등은 떠올라 지각과 맨틀을 형성하였다.

(b) 달에는 운석이 많이 떨어졌기 때문에 생성 초기부터 존재하던 암석들은 달 내부에 존재하고 아폴로호가 수집한 암석들은 달 표면의 다른 곳으로부터 날아온 운석의 파편이기 때문에 밀도가 다른 것이다.

(c) 현재 지구는 자기장이 존재한다고 알려져 있는데 그러한 자기장이 존재하는 이유는 철로 이루어진 액체인 외핵의 대류현상 때문이라는 다이나모 이론이 유력하다. 그러므로 만약 자기장이 존재하지 않는 지구형 행성이 있다면 행성 내부가 고체로만 이루어져 있어 대류현상이 일어나지 않거나 자기장을 유발할 수 있는 철이 행성의 구성 원소 중에 포함되어 있지 않기 때문일 수도 있다.

(d) 지구에는 화성, 수성, 달과는 달리 두터운 대기층이 존재한다. 이러한 대기층 때문에 운석이 날아들어 오면서 대기와의 마찰열로 인해 불타서 사라져 지상까지 도달하는 운석이 거의 없기 때문이다.

(e) 운석이 충분히 크다면 대기권과의 마찰열로 어느 정도 불타 소멸되더라도 전부가 소멸되기 전에 지상에 도착하게 돼 지표와 충돌 후 폭발하게 된다. 하지만 운석의 크기가 작다면 대기권을 돌파하는 동안 불타서 소멸된다.

부족 답안의 사례 3

(a) 지구의 평균밀도와 대륙지각의 평균밀도가 다른 이유는 제시문 1, 2번째 지문을 근거하여 생각해보면, 지구생성 초기에 대기권 형성이 덜 이루어져 유성이 대기권에서의 마찰없이 지구와의 충돌이 일어나면서 엄청난 열이 발생하였을 것이고, 철질 운석과 석질 운석의 성분과 지구의 성분이 용융 상태로 되어 그로 인해 용융 상태에서 성분의 밀도 차로 인해 무거운 철질 성분은 지구 내부로, 비교적 가벼운 석질 성분은 외부로 드러나게 되었을 것이다. 2 지문을 근거로 하여 대륙 지각의 주요 암석인 화강암보다 밀도가 큰 철 성분을 지하 심부에서 나온 암석들이 더 많이 포함하고 있음을 보면 그 점을 확인할 수 있다. 그래서 비교적 가벼운 석질 성분으로 이루어진 대륙지각의 평균 밀도는 지구 내부의 철질 성분이 많은 부분을 제외한 것이기에 지구의 평균 밀도와 다른 것이다.

(b) 달의 평균 밀도를 보았을 때 주성분이 규산염 광물일 것임을 추측할 수 있다.

(c) 지구 자기장의 형성은 내부의 철질 성분이 고온, 고압의 상태에서 용융된 액체 상태로 존재하여 그것이 대류함으로써 형성된다고 알려져 있는데 자기장이 존재하지 않는 지구형 행성이 있다면 그 행성의 구성 성분이 지구에 비해 가볍거나 중력의 영향이 약하거나 하여 내부의 환경을 고온, 고압의 환경으로 제대로 형성하지 못하여서 일 것이다.

(d) 첫 번째 이유로는 지구는 대기권이 두꺼운 층으로 형성되어 있어 운석이 대기 중에서 대부분 마찰로 인해 소멸하기 때문에 수가 적다. 4지문을 보면 직경 200m보다 큰 석질 운석이나 40~60m 보다 큰 철질 운석은 대기권을 거의 그대로 통과한다고 되어있는 걸 보면 이보다 작은 운석들은 대기 중에서 거의 소멸한다는 걸 알 수 있다. 두 번째 이유로는 아주 미세한 영향이겠지만 작은 철질 운

석의 경우에는 지구 자기장이 있어 그 영향으로 인해 궤도가 약간 변경되거나 하여 지구와 충돌하게 될 궤도에서 벗어나기 때문이다.

(e) 크기가 작은 경우에는 대기권과의 마찰로 인해 소멸될 수 있지만 크기가 큰 경우에는 대기권과의 마찰만으로는 소멸되는 것이 불가능하다. 소멸되지 않고 통과한 운석들은 지구 중력에 의한 가속도로 인해 가지게 된 운석의 운동에너지와 대기권과의 마찰로 생겨난 열에너지를 지닌 상태로 지구와 충돌을 일으키면서 폭발하게 되는 것이다.

(a) 지구의 평균밀도와 대륙지각의 평균밀도가 다른 이유를 설명하고, 어떠한 과정에 의하여 이러한 밀도 차이가 생겼는지 설명하시오.

- 우수답안: 제시문을 보면 지구의 대륙지각의 밀도는 약 2.7 g/cm^{3}이고, 지구의 평균밀도는 약 5.5 g/cm^{3}이라고 나와 있다. 지구의 평균밀도가 지구의 대륙지각의 평균 밀도보다 큰 것을 알 수 있다. 이러한 밀도 차이가 발생하게 된 이유는 다음과 같다. 원시지구가 형성된 초기, 지구내부는 대체로 균질했다. 그러나 계속되는 미행성체의 충돌로 지구의 온도는 계속 상승했고, 결국 액체 상태의 마그마바다 상태가 되었다. 이때 밀도가 큰 철과 니켈 같은 물질들은 지구의 중심 쪽으로 이동하였고, 밀도가 작은 물질들은 지구 겉 표면 쪽에 모이게 되면서 지금과 같은 지구의 중심 쪽으로 갈수록 밀도가 크게 되는 층상구조를 이루게 되었다. 차츰 미행성체의 충돌 빈도가 줄어들면서 지구의 온도는 하강하였고 지구 겉 표면은 굳어 원시지각을 형성하였다. 따라서, 지구의 대륙지각은 지구 구조 중 가장 밀도가 작은 부분 중 하나이다. 지구는 중심으로 갈수록 밀도가 큰 물질들로 이루어져 있고, 핵에는 철과 니켈과 같은 무거운 물질들로 이루어져 있다. 그렇기 때문에 지구의 평균밀도와 대륙지각의 평균밀도는 다를 수밖에 없고 지구의 평균밀도가 더 큰 것이다.

- 부족한 답안: 지구는 대륙지각과 해양지각으로 이루어져 있고 평균 밀도는 5.6 g/cm^{3}이다. 대륙지각은 주로 화강암으로 이루어져 있고 밀도는 2.7 g/cm^{3}이다. 지구의 평균밀도와 대륙지각의 평균밀도가 다른 이유는 포함하는 암석의 비율이 다르기 때문이다. 지구는 대륙지각과 해양지각으로 이루어져 화강암, 현무암 외에도 다양한 암석으로 이루어져 있다. 반면에 대륙지각은 해양지각에 속하는 암석들을 포함하지 않거나 그 양의 비율이 다르다. 그렇기에 이 둘의 밀도는 다르다. 암석이 생성될 때 무거운 원소를 많이 포함할수록 암석의 밀도는 더 크게 되는데, 이처럼 암석의 성분에 따라 밀도의 차이가 발생한다.

  - 해설: 모범답안은 출제 의도에서 평가하고자 하였던 원시지구의 형성과정 및 지구의 분화과정과 그 결과에 대한 이해를 비교적 글로 잘 표현하였다. 반면 부족한 답안은 지구의 층상구조에 대한 고찰이 빠져 있어서 모범답안이 될 수 없었다.

(b) 달의 평균밀도와 달의 표면에서 아폴로 달 탐사를 통해 수집한 암석의 밀도가 다른 이유를 설명하시오. (총 3점)

- 우수답안: 달도 역시 형성 초기에는 용융상태로 존재하였다. 그 과정에서 밀도가 큰 물질은 가라앉고 밀도가 작은 물질은 떠올라 지표를 구성하는 물질이 되었다. 아폴로 달 탐사를 통해 수집한 암석은 달의 표면을 구성하는 암석인데, 달의 평균 밀도는 표면을 구성하는, 수집한 암석의 밀도보다 클 수밖에 없다.

- 부족한 답안: 달 또한 표면의 평균밀도와 전체 평균밀도가 다르다. 달이 이러한 특징을 보이는 것은 지문을 보아 표면과 내부를 구성하는 암석의 종류와 비율이 다르기 때문이라고 해석할 수 있다. 달의 내부에서 만들어지는 심성암은 주로 달의 내부에 많이 분포하고, 화성암은 그와 반대로 표면에 많이 분포한다. 심성암은 생성시 높은 압력에서 생성되므로 그 밀도가 화성암에 비해 대체로 크다. 아폴로 탐사선은 연착륙 탐사선이므로 주로 표면의 암석을 채취하게 된다. 고로 화성암을 더 많이 채취함으로 그 암석들의 평균밀도는 달의 평균밀도보다 작게 된다.

  - 해설: 원시지구의 형성 및 분화과정이 지구형 행성에 동일하게 적용된다는 것을 이해하고 이를 논리적으로 표현하는 것을 측정하고자 하였다. 부족한 답안은 심성암과 화성암을 별개로 취급하여 화성암에 대한 이해가 부족하여 논리가 일부 결여되어 있다.

(c) 만약 달에 지구와 같은 자기장이 존재하지 않는다면 그 이유를 설명하시오.

- 우수답안: 지구에 자기장이 존재하는 이유는 지구의 외핵이 액체상태의 철 성분으로 구성되어 있고, 이것이 지구 자전과 함께 회전하면서 유도 전류를 만들기 때문이다. 그리고 이 유도 전류는 주위에 자기장을 만든다. 지구의 외핵이 고체상태로 존재했다면 지구 자기장은 존재하지 않았을 것이다. 마찬가지로 지구형 행성에 자기장이 존재하지 않는다면 그 행성의 내부에 액체 상태의 철 성분으로 구성된 층상 구조가 존재하지 않기 때문에 자기장이 존재하지 않는 것이다.

- 부족한 답안: 지구의 자기장은 외핵의 철 성분이 대류를 하면서 생긴다. 그러므로 자기장이 없는 행성은 철 성분이 대류하지 않아서 그렇다. 대류를 하지 않는 이유는 온도가 철의 용융점보다 낮아서 그렇다. 그 이유는 압력이 적거나, 온도가 낮은 이유가 있다. 그러므로, 철 성분이 없거나, 철 성분이 존재하는 곳의 온도가 철의 용융점보다 낮아서 대류하지 않으므로 자기장이 없다.

  - 해설: 이 문제는 지구형 행성의 분화 과정을 통하여 층상구조가 형성될 때 이 중 지구의 외핵과 같은 액체상의 층이 있는 경우 지오다이나모 가설에서 제안된 바와 같은 자기장이 형성될 수 있다는 내용을 이해하는지를 측정하는데 주안점을 두었다. 모범답안은 지구의 분화과정에서 형성된 외핵이 액체상의 철로 구성되어 있다는 점과, 지구자전에 의하여 자기장이 형성될 수 있다는 내용을 비교적 논리적으로 적었다. 부족한 답안은 철 성분의 외핵을 언급하였으나, 왜 자기장이 형성되지 않는지에 대한 논리적 제시가 부족하였다.

(d) 오늘날 지구에는 화성, 수성, 달에 비하여 운석 충돌 구덩이가 훨씬 적은 수만 분포한다. 가능한 이유를 모두 설명하시오.

- 우수답안: 오늘날 지구에 화성, 수성, 달에 비하여 운석 충돌 구덩이가 훨씬 적은 수만 분포하는 이유를 모두 설명하자면 다음과 같다. 먼저 지구에는 대기가 있다. 대기가 있기 때문에 운석들이 대기와의 마찰로 대부분 타 없어진다. 또한 풍화-침식작용이 일어나기 때문에 운석충돌 구덩이들이 시간이 지나면서 없어졌을 것이다. 바다의 존재도 이유가 될 수 있다. 운석이 바다에 떨어진다면 구덩이가 생기지 않을 것이다. 판의 운동 또한 한 원인이다. 판의 운동으로 지진과 화산이 발생하면서 구덩이가 사라질 수 있다. 생명체 존재도 영향을 줄 수 있다. 식물들의 뿌리가 침식작용을 촉진할 수 있고, 인간의 자연개발 또한 영향이 된다. (6점 만점 중 5점)

- 부족한 답안: 지구에 적은 양의 크레이터가 존재하는 이유는 크게 2가지를 들 수 있다. 우선 지구에는 화성, 수성, 달에는 없는 물이 존재한다. 물은 지구를 순환하면서 침식작용을 일으켜 운석 구덩이를 마모시켜 지워버리는 것이다. 또한 두 번째로 지구는 수성이나 달에 비해 많은 양의 대기를 가지고 있다. 이로 인해 운석은 지구로 진입할 때 대부분 대기와의 마찰로 타버리고 지표에 도착하는 수는 극히 작다. 또한 대기는 풍화작용을 일으켜 물처럼 구덩이의 흔적을 지움으로 지구는 달, 수성, 금성에 비해 운석구덩이의 수가 적다.

  - 해설: 이 문제는 지구형 행성 중 지구에 존재하는 대기권, 해양의 수권, 그리고 암석권의 판구조운동이 (물론 금성에는 지구보다 더 밀한 대기가 존재하고 있지만) 지구에 독특하게 존재하며 이를 통하여 지구 표면의 진화가 다른 지구형 행성과는 어떻게 다를 것인지를 이해하고 논리적으로 설명할 수 있는지를 측정하고자 하였다. 지구에 존재하는 대기와 액체상 물의 순환작용에 의하여 지표는 끊임없이 풍화작용을 받으며, 또한 지구의 표면이 약 70% 가량 물에 덮여있는 상황에서는 바다에 운석충돌이 일어날 확률이 더 높으며 이 경우에는 해저에서 풍화되거나 퇴적물에 덮여 쉽게 인지가 어렵기도 하다. 또한 지구 표면의 2/3를 덮고 있는 해양지각은 판구조 운동에 의하여 맨틀의 대류와 함께 지속적으로 섭입되어 사라지기 때문에 현재 지구 표면의 해양 지각 중 가장 오래된 부분은 약 2억 년 정도밖에 되지 않아서 지구의 연령과 비교한다면 전체 역사 중 매우 적은 부분만이 현재의 해양지각에 기록되어 있다. 이러한 내용을 모두 논리적으로 제시하는 답안은 없었으며, 위에 발췌한 모범답안도 정답의 3/4 정도만 제시하였다. 부족한 답안은 주로 풍화작용과 대기의 작용으로 운석이 대기권에 진입하면서 타버린다는 점을 강조하여 제시되었다.

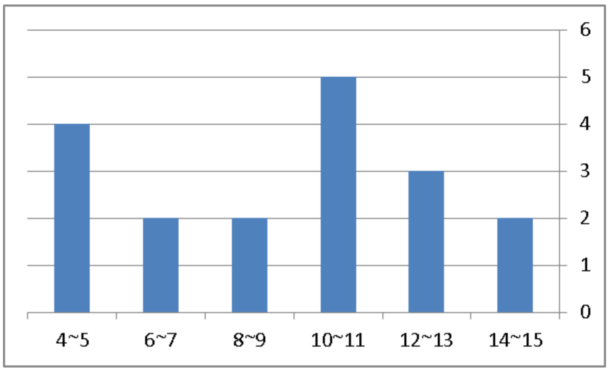
(e) 운석이 지구에 떨어질 때 그 크기에 따라 불타면서 소멸되기도 하고 지표와 충돌해서 폭발하기도 한다. 그 이유를 설명하시오.

- 모범답안: 운석은 지구에 떨어질 때 대기와의 마찰로 인해 불타게 된다. 하지만 대기의 두께는 한정되어 있기 때문에 일정크기 이상의 운석이 떨어지면 운석이 다 타기 전에 지표에 도착하게 된다.

그리하면 운석은 지표와 충돌해 큰 폭발을 일으키기도 한다. 그 대표적인 예가 지문에 제시된 공룡멸종의 원인으로 추정되는 거대 운석 충돌이라 볼 수 있다.

- 부족한 답안: 운석이 지구에 충돌할 때 공기의 저항을 받아 불타면서 그 크기가 작아진다. 따라서 운석의 표면적이 넓을수록 저항은 커지고 소멸되는 부피도 커진다. 그렇기 때문에 밀도가 큰 철질 운석은 밀도가 작은 석질 운석보다 크기가 작아도 지표에 도착할 수 있는 것이다. 크기가 어느 정도 이상이면 공기 저항에 의해 불타도 남은 운석 덩어리가 지표와 충돌할 수 있다. (3점 만점에 2점 획득, 가장 흔한 답안 유형임.)
  - 해설: 이 문제는 지구의 크기에 비하여 대기권이 매우 얇은 층이라는 것을 이해하고 이를 논리적으로 표현할 수 있는지를 측정하는데 초점을 맞추었다. 따라서 정성적으로 표현해서 대기권 중 운석과 밀한 대기의 마찰로 인하여 운석을 불태울 수 있는 부분은 전체 대기권 중 하부의 극히 얇은 부분임을 논리적으로 설명하는 것이 초점이다. 부족한 답안은 주로 운석의 크기에만 초점을 맞추어 서술하였는데 이는 이미 논지에서 설명이 되어 있는 내용으로 이렇게 되는 이유가 대기권의 두께가 매우 제한적인 것이기 때문에 모범답안이 되기에는 부족하였다.

4) 채점 결과



2015학년도 지구과학 모의논술고사 점수분포 현황. (20점 만점, 총 18인)

총 18명의 예비 수험생을 대상으로 실시한 2014년 모의논술고사는 20점 만점에 평균 9.56점으로 채점되었으며 최고 득점자는 15점을 획득한 학생이 2명 있었다. 전반적인 성적의 분포는 그래프와 같으며 10~11점대가 총 5명으로 가장 많았으며, 4~5점을 받은 학생이 4인으로 그 다음으로 많았다. 이는 매우 낮은 점수를 받은 학생들이 금번 모의논술고사 형태의 문제에 익숙하지 않았거나, 아직 고등학교 지구과학의 전반적인 내용, 특히 지구과학II 를 수강하지 않아서 생기는 문제로 사료된다. 13점 이상을 획득한 학생들은 다른 유형의 지구과학 논술문제가 나와도 논리적인 답을 쓸 수 있을 것으로 판단된다.