

논술 (자연 B)

※주의사항 : 문제 1은 필수로 풀고 문제 2, 3 중 한 문제를 선택해서 답안을 작성하시오.

문제 1: 수학 (필수)

(가)

그림 1과 같이 둘레의 길이가 1인 정삼각형 ABC 를 직선 l 위에서 한 바퀴 굴린다. 이때 꼭짓점 A 는 꼭짓점 C 를 중심으로 하는 원의 호를 따라 A' 의 위치로 이동한 후 다시 점 B' 를 중심으로 하는 원의 호를 따라 A'' 의 위치로 이동한다.

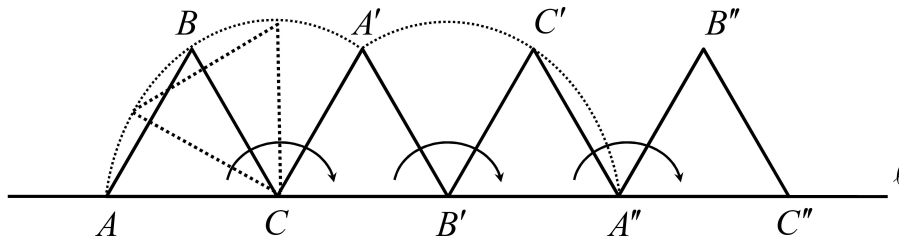


그림 1.

(나)

그림 2와 같이 둘레의 길이가 1인 정사각형 $ABCD$ 가 직선 l 위에서 한 바퀴 굴러 정사각형 $A''B''C''D''$ 의 위치에 도달한다.

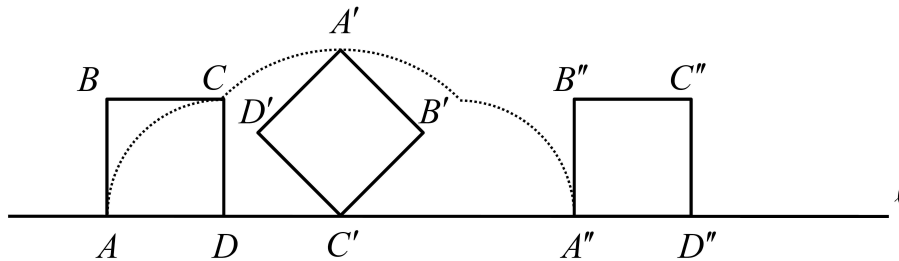


그림 2.

(다)

그림 3에서 원점 O 를 지나는 직선 ℓ 이 세 점 $O, A(2,4,4), B(3,0,3)$ 를 포함하는 평면 α 와 수직으로 만난다. 세 점 O, A, B 를 지나는 원이 직선 ℓ 의 둘레로 각 θ 만큼 회전할 때 호 \widehat{AB} 가 지나가는 영역을 S 라 한다. S 위의 임의의 점 (a,b,c) 를 점 $(a,b,2c)$ 로 대응시켜 얻은 영역을 S' 라 한다.

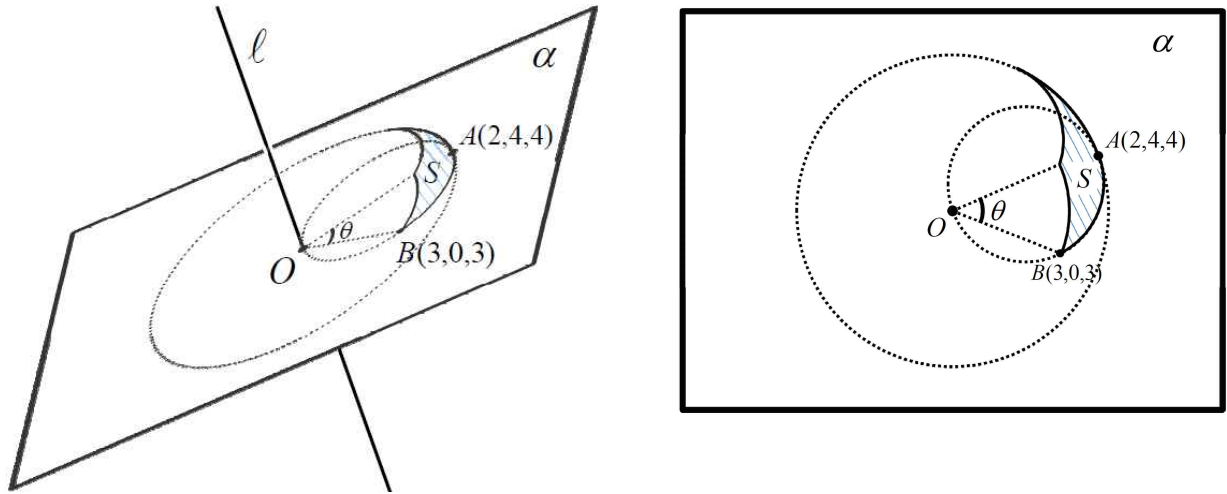


그림 3.

- (a) 제시문 (가)에서 꼭짓점 A 가 움직인 거리를 구하시오.
- (b) 제시문 (나)에서 꼭짓점 A 가 움직인 거리를 구하시오.
- (c) 둘레의 길이가 1인 정 n 각형 $A_1A_2 \dots A_n$ 에서 선분 $\overline{A_kA_n}$ 의 길이를 구하시오. (단, $1 \leq k \leq n-1$)
- (d) 둘레의 길이가 1인 정 n 각형을 직선 위에서 한 바퀴 굴릴 때 한 꼭짓점이 움직인 거리 d_n 과 극한값 $\lim_{n \rightarrow \infty} d_n$ 을 구하시오.
- (e) 제시문 (다)에서 내적 $\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{AB}$ 를 구하고 θ 가 2π 일 때 S 의 넓이를 구하시오.
- (f) 제시문 (다)에서 S 의 넓이 $f(\theta)$ 와 S' 의 넓이 $g(\theta)$ 를 구하시오. (단 $0 \leq \theta \leq 2\pi$)

문제 2: 물리 (선택)

(가)

그림 1과 같이 물체 1(질량 m_1 , 속도 v_1)과 물체 2(질량 m_2 , 속도 v_2)가 원형테 내에서 반경이 r 인 원형 궤도를 따라 각각 반시계방향으로 등속 원운동을 하고 있다. 두 물체의 질량비 $\alpha = m_2/m_1$ 는 정수이며, $t=0$ 일 때 물체 1은 $+x$ 축 위의 점에서, 물체 2는 $-x$ 축 위의 점에서 출발한다. 물체 1과 물체 2는 출발 후 원형궤도를 한 바퀴 회전하기 전에 점 P 에서 탄성충돌한다. β 는 y 축과 선분 \overline{OP} 가 이루는 각이다.

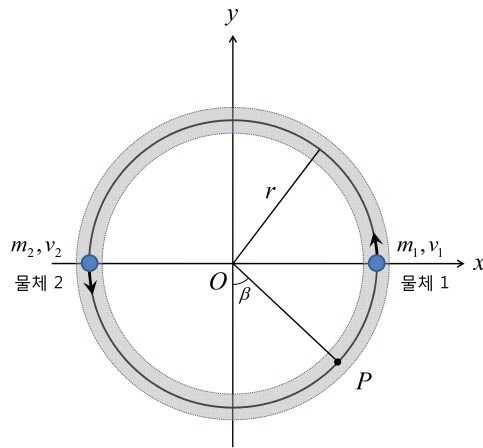


그림 1.

(나)

그림 2에서는 그림 1과 달리 원형테 내 원형궤도를 따라 동일한 질량 m 과 속도 v 를 갖는 두 물체가 $t=0$ 일 때 $+x$ 축 위의 점에서 동시에 출발하여 시계방향과 반시계 방향으로 각각 회전한다. 이와 동시에 원형테도 원점 둘레로 일정한 각속도 ω 로 회전을 시작한다. 두 물체는 $t=t_1$ 에 처음 충돌하고, 그동안 $t=0$ 일 때 $-x$ 축 위에 있던 점 Q 가 이동한 거리를 S 라 한다. 단, 두 물체는 원형테가 한 바퀴 회전하기 전에 충돌한다.

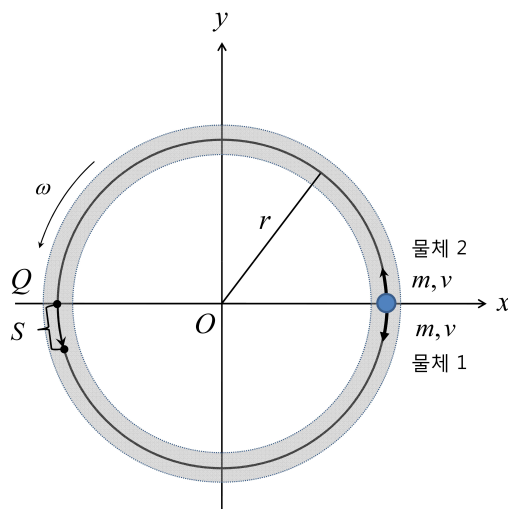


그림 2.

◎ 제시문 (가)를 읽고 아래 물음에 답하시오.

(a) 두 물체가 P 점에서 처음 만날 때 속력비 v_2/v_1 를 β 의 함수로 구하시오.

(b) 두 물체가 $\beta=0$ 인 P 점에서 처음 충돌한 후 물체 1의 운동 방향이 시계방향으로 바뀌기 위한 최소 정수 질량비 α_{\min} 을 구하시오.

(c) 질량비가 $\alpha=5$ 인 두 물체가 $\beta=0$ 인 P 점에서 처음 충돌한 직후 두 물체의 속력 v_1' 와 v_2' 를 v_2 의 함수로 구하시오.

(d) 질량비가 $\alpha=7$ 인 두 물체가 $\beta=0$ 인 P 점에서 처음 충돌한 후부터 두 번째 충돌할 때까지 두 물체가 진행한 거리를 각각 구하시오.

◎ 제시문 (나)를 읽고 아래 물음에 답하시오.

(e) 그림 2에서 거리 S 를 측정하면 각속도 ω 를 알 수 있다. 원형궤도의 반경이 1m인 장치로 거리 S 를 측정하여 각속도를 구하고자 한다. 거리 S 를 1mm 단위로 측정할 수 있다면, $1^\circ/s$ 차이가 나는 두 각속도가 구별되기 위해서는 물체의 속력은 어떤 조건을 만족해야 하는가?

논제 3: 화학 (선택)

(가)

1884년에 프랑스의 화학자인 르샤틀리에는 화학 평형의 이동 현상에 대하여 “어떤 가역반응이 평형상태에 있을 때 농도, 압력 및 온도를 변화시켜 화학 평형이 깨지면 그 변화를 감소시키려는 방향으로 평형이 이동하여 새로운 평형 상태에 도달한다.”라고 발표하였다. 예를 들어, 그림 1과 같이 질소 기체와 용액과의 평형상태에서 압력을 가하여 질소 기체의 부피를 줄이면 단위 부피 속의 질소 분자 수가 증가한다. 질소 기체 분자가 용액 속으로 녹아들어 가면서 증가된 압력을 감소시키는 방향으로 평행이 이동하고, 용액 속의 분자 수가 증가하며 새로운 평형에 도달한다.

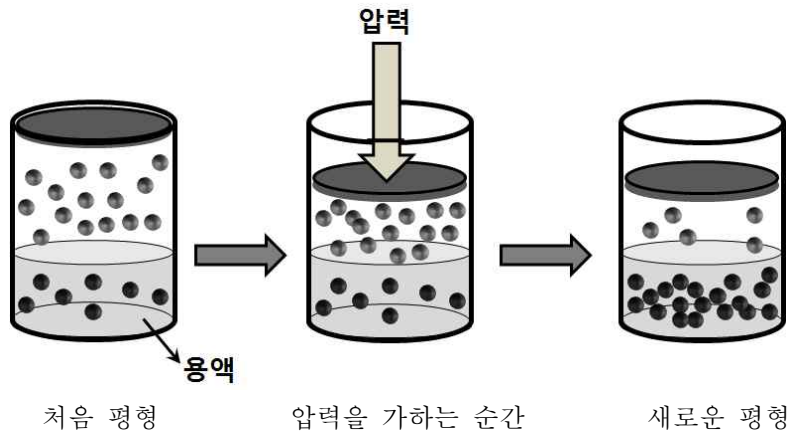


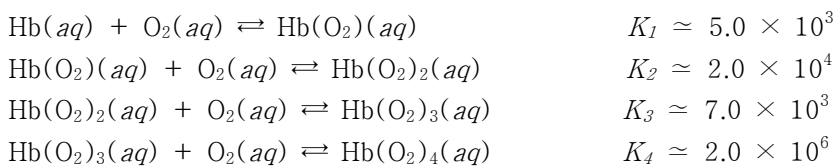
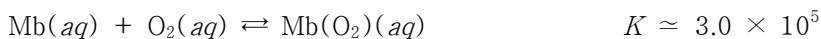
그림 1. 기체에 압력을 가했을 때 평형의 변화

(나)

항상성은 사람의 생명 현상을 유지하는 데 필수적인 것 중 하나이다. 외부의 환경이 변화하더라도 우리 몸은 조절 장치를 통해 최적 생존 조건을 맞추면서 안정한 상태, 즉 항상성을 유지하려 한다. 그러나 외부 환경이 급격히 변할 때는 그 변화에 적응하는 데 오랜 시간이 걸리므로 우리 몸에서는 여러 가지 부작용이 일어난다. 예를 들면 해수면(1 기압)과 같은 지역에 사는 사람이 고지대(에베레스트 정상, 0.4 기압)로 가게 되면 두통, 멀미, 극단적인 피로 등의 증상이 나타나며 심한 경우에는 의식불명에 이를 수 있다. 이를 ‘고산병’이라 부르며, 이 증상은 세포에 산소 공급이 원활하게 이루어지지 못하여 산소결핍이 발생하기 때문이다. 한편 심해 잠수부들은 너무 빠르게 수면으로 나오게 되면 ‘잠수병’이라고 부르는 병이 발생하여 생명이 위험한 상태가 될 수 있다. 이는 잠수부가 수면으로 빠르게 올라오면서 압력이 빠르게 감소하여 혈액 속에 기포가 발생하고, 이 기포가 모세혈관 등을 막아 혈액의 흐름을 방해하기 때문이다. ‘고산병’과 ‘잠수병’의 발생 원인은 서로 다르지만 모두 화학 평형과 관련이 있다.

(다)

우리가 주어진 환경에서 생활할 수 있는 이유는 몸속에서 필요한 산소(O_2)의 농도가 일정하게 유지되기 때문이다. 적혈구에 있는 헤모글로빈(Hb)이라는 단백질은 산소와 화학 결합을 하여 산화 헤모글로빈($Hb(O_2)_4$)을 생성하여 산소를 운반한다. 산화 헤모글로빈이 모세혈관에 도달하면 산소가 해리되며, 해리된 산소는 거의 모든 세포에서 발견되는 미오글로빈(Mb)이라는 또 다른 산소 운반 단백질과 결합한다. 이렇게 생성된 산화 미오글로빈($Mb(O_2)$)은 산소를 세포내로 운반하고, 산소는 이산화탄소(CO_2)로 치환된다. 헤모글로빈은 허파에서 산소와 강하게 결합하지만, 모세혈관에서는 해리되어 자발적으로 미오글로빈에게 산소를 내어준다. 1개의 헤모글로빈은 4개의 산소와 결합하고, 1개의 미오글로빈은 1개의 산소와 결합한다. 이러한 현상은 산소의 농도와 관계가 있는데, 산소의 농도가 헤모글로빈과 미오글로빈의 평형에 영향을 주기 때문이다.

헤모글로빈의 산화 반응미오글로빈의 산화 반응

(a) 강산과는 달리 약산은 농도에 따라 해리도가 변화한다. 예를 들면, 약산인 아세트산($K_a = 1.76 \times 10^{-5}$)은 1 M 용액에서 1% 이하로 해리되지만, 10^{-4} M 용액에서는 34%나 해리된다. 그렇다면 1 M의 어떤 약산 HA($K_a = 1.0 \times 10^{-6}$)가 1 L에서 0.1%가 해리된다고 할 때, 이 용액에 99 L의 물을 첨가하였다면 몇 %의 HA가 해리되는가? 그리고 이와 같이 농도에 따라 해리도가 달라지는 현상을 르샤틀리에 원리를 근거로 논술하시오.

(b) 헤모글로빈(Hb)과 산소(O_2)가 반응하여 산화 헤모글로빈($Hb(O_2)_4$)이 되는 전체 화학 반응식 및 전체 평형 상수식을 쓰고, '고산병'이 발생하는 이유를 르샤틀리에 원리를 근거로 간단히 논술하시오.

(c) 제시문 (다)의 미오글로빈(Mb) 산화 반응식으로부터 이 반응의 평형 상수식을 구하시오. 그리고 허파(산소의 농도 $\approx 2.0 \times 10^{-4}$ M)와 모세혈관(산소의 농도 $\approx 3.0 \times 10^{-5}$ M) 내의 산화 헤모글로빈과 헤모글로빈의 농도비 및 산화 미오글로빈과 미오글로빈의 농도비를 각각 구하시오.

(d) 문제 (c)의 결과를 이용하여 헤모글로빈이 허파에서는 산소와 강하게 결합하지만, 모세혈관에서는 해리되어 자발적으로 미오글로빈에게 산소를 내어주는 이유를 간단히 논술하시오. 단, 헤모글로빈의 농도와 미오글로빈의 농도는 같다고 가정한다.

(e) 제시문 (나)에서 언급한 '잠수병'의 발생을 줄이기 위해 최근에는 잠수부의 공기탱크에 질소와 산소의 혼합기체를 넣는 대신 헬륨과 산소의 혼합기체를 사용한다. 제시문 (가)를 참조하여 헬륨을 사용하는 이유를 추론하시오.